# 多项式优化入门

王杰

中国科学院数学与系统科学研究院

北京师范大学, 2024 年秋季

# 课程内容

1. 半定规划
2. 平方和理论
3. 测度和矩
4. 矩-平方和松弛分层
5. 项稀疏（TS）
6. 变量稀疏（CS）
7. 扩展与应用
8. 软件与实验

# 矩-平方和松弛分层

$$
f_{\min} := \begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} & g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i \in [m] \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j \in [\ell] \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{y}} & L_{\mathbf{y}}(f) \\ \text{s.t.} & \mathbf{M}_r(\mathbf{y}) \succeq 0,\ y_0 = 1 \\ & \mathbf{M}_{r-d_i}(g_i\mathbf{y}) \succeq 0,\ i \in [m] \\ & L_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^{\alpha} h_j) = 0,\ \forall |\alpha| \leq 2r - \deg(h_j), j \in [\ell] \end{cases}
\qquad
\begin{cases} \sup\limits_{\lambda} & \lambda \\ \text{s.t.} & f - \lambda \in \mathcal{Q}(\mathbf{g})_{2r} + \mathcal{I}(\mathbf{h})_{2r} \end{cases}
$$

# 矩-平方和松弛分层

$$f_{\min} := \begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} & g_i(\mathbf{x}) \ge 0, \quad i \in [m] \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j \in [\ell] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{y}} & L_{\mathbf{y}}(f) \\ \text{s.t.} & \mathbf{M}_r(\mathbf{y}) \succeq 0,\ y_{\mathbf{0}} = 1 \\ & \mathbf{M}_{r-d_i}(g_i\mathbf{y}) \succeq 0,\ i \in [m] \\ & L_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} h_j) = 0,\ \forall |\boldsymbol{\alpha}| \le 2r - \deg(h_j), j \in [\ell] \end{cases} \qquad \begin{cases} \sup\limits_{\lambda} & \lambda \\ \text{s.t.} & f - \lambda \in \mathcal{Q}(\mathbf{g})_{2r} + \mathcal{I}(\mathbf{h})_{2r} \end{cases}$$

# 性质

- 假定 Archimedean 条件：
  - $\lambda_r \nearrow f_{\min}$，$\lambda_r^* \nearrow f_{\min}$，$r \to \infty$
  - 如果多项式优化问题有唯一最优解 $\mathbf{x}^*$，那么 $\lim_{r\to\infty} L_{\mathbf{y}^r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*$
  - 一般地，有限收敛性成立
- 平坦性条件或秩一：达到全局最优，可提取全局最优解

# 性质

- 假定 Archimedean 条件：
  - $\lambda_r \nearrow f_{\min}$，$\lambda_r^* \nearrow f_{\min}$，$r \to \infty$
  - 如果多项式优化问题有唯一最优解 $\mathbf{x}^*$，那么 $\lim_{r\to\infty} L_{\mathbf{y}^r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*$
  - 一般地，有限收敛性成立
- 平坦性条件或秩一：达到全局最优，可提取全局最优解

# 性质

- 假定 Archimedean 条件：
  - ➤ $\lambda_r \nearrow f_{\min}$，$\lambda_r^* \nearrow f_{\min}$，$r \to \infty$
  - ➤ 如果多项式优化问题有唯一最优解 $\mathbf{x}^*$，那么 $\lim_{r\to\infty} L_{\mathbf{y}^r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*$
  - ➤ 一般地，有限收敛性成立
- 平坦性条件或秩一：达到全局最优，可提取全局最优解

# 性质

- 假定 Archimedean 条件：
  - $\lambda_r \nearrow f_{\min}$，$\lambda_r^* \nearrow f_{\min}$，$r \to \infty$
  - 如果多项式优化问题有唯一最优解 $\mathbf{x}^*$，那么 $\lim_{r\to\infty} L_{\mathbf{y}^r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*$
  - 一般地，有限收敛性成立
- 平坦性条件或秩一：达到全局最优，可提取全局最优解

# 稀疏单项式基

- 无约束：Newton 多面体 $\rightsquigarrow$ 稀疏单项式基
- $f, g_i, h_j$ 稀疏：
  - 构造一组稀疏单项式基 $\boldsymbol{v}(\mathbf{x}) \subsetneq [\mathbf{x}]_r$
  - $\rightsquigarrow \mathbf{M}_{\boldsymbol{v}}(\mathbf{y}) := L_{\mathbf{y}}(\boldsymbol{v}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\mathbf{x})^{\intercal})$

# 稀疏单项式基

- 无约束： Newton 多面体 $\rightsquigarrow$ 稀疏单项式基
- $f, g_i, h_j$ 稀疏：
  - ➤ 构造一组稀疏单项式基 $\boldsymbol{v}(\mathbf{x}) \subsetneq [\mathbf{x}]_r$

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{M}_{\boldsymbol{v}}(\mathbf{y}) := L_{\mathbf{y}}\left(\boldsymbol{v}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\mathbf{x})^\intercal\right)$

# 商环

- **等式约束**: $h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, \ell$

$$f - \lambda \in \mathcal{Q}(\mathbf{g}) + \mathcal{I}(\mathbf{h}) \iff f - \lambda \in \mathcal{Q}(\mathbf{g}) \mod \mathcal{I}(\mathbf{h})$$

➤ 利用 Gröbner 基计算一组约化单项式基

➤ 在商环 $\mathbb{R}[\mathbf{x}]/\mathcal{I}(\mathbf{h})$ 上建立等式:

$$f - \lambda = \sigma_0 + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i g_i$$

⇝ 用 Gröbner 基计算 normal form

# 商环

- **等式约束**: $h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, \ell$

$$f - \lambda \in \mathcal{Q}(\mathbf{g}) + \mathcal{I}(\mathbf{h}) \iff f - \lambda \in \mathcal{Q}(\mathbf{g}) \mod \mathcal{I}(\mathbf{h})$$

➤ 利用 Gröbner 基计算一组约化单项式基

➤ 在商环 $\mathbb{R}[\mathbf{x}]/\mathcal{I}(\mathbf{h})$ 上建立等式:

$$f - \lambda = \sigma_0 + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i g_i$$

$\rightsquigarrow$ 用 Gröbner 基计算 normal form

# 例子（二元优化）

$$\begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{x}} & \mathbf{x}Q\mathbf{x}^\intercal \\ \text{s.t.} & x_i^2 = 1, \quad i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

- $\boldsymbol{v}(\mathbf{x}) = \{1, x_1, \ldots, x_n, x_1x_2, \ldots, x_{n-1}x_n\}$
- 等式约束：

$$\mathbf{x}Q\mathbf{x}^\intercal - \lambda = \boldsymbol{v}(\mathbf{x})G\boldsymbol{v}(\mathbf{x})^\intercal \mod \mathcal{I}(\mathbf{h})$$

# 例子（二元优化）

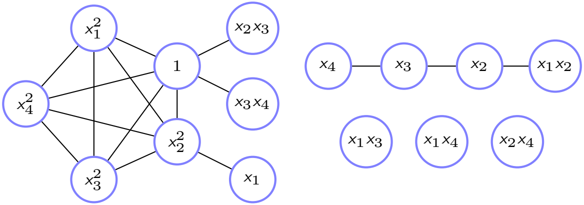
| | 基的大小 | 等式约束个数 |
|---|---|---|
| 原始 | $\binom{n+2}{2}$ | $\binom{n+4}{4}$ |
| 商环 | $1+n+\binom{n}{2}$ | $1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}$ |
| | $n=10$ | |
| 原始 | 66 | 1001 |
| 商环 | 56 | 386 |
| | $n=20$ | |
| 原始 | 231 | 10626 |
| 商环 | 211 | 6196 |

# 项稀疏型

- $f = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$, $\text{supp}(f) := \{\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \mid f_{\alpha} \neq 0\}$
- 单项式基： $[\mathbf{x}]_r$
- 项稀疏型图 $G^{\text{tsp}}(V, E)$：
  - $V := [\mathbf{x}]_r$
  - $\{\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}\} \in E \iff \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}} \in \text{supp}(f) \cup \bigcup_{i=1}^{m} \text{supp}(g_i) \cup [\mathbf{x}]_r^2$

# 项稀疏型图

$$\begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4} & f(\mathbf{x}) = x_1^4 + x_1x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2x_4^2 \\ \text{s.t.} & g_1(\mathbf{x}) = 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \geq 0 \\ & g_2(\mathbf{x}) = 1 - x_3x_4 \geq 0 \end{cases}$$



# TSSOS 迭代程序

- 对于图 $G(V,E)$，$V=[\mathbf{x}]_r$，定义

$$\mathrm{supp}(G) := \left\{\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}} \mid \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta} \text{ 或} \{\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}\} \in E\right\}$$

- 令 $G_0^{(0)} := G^{\mathrm{tsp}}$. 定义图的升链 $(G_0^{(k)})_{k\geq 1}$：
  1. 支撑扩张：令图 $F_0^{(k)}$ 具有顶点集 $[\mathrm{x}]_r$ 和边集

$$E(F_0^{(k)}) := \left\{\{\mathrm{x}^{\alpha},\mathrm{x}^{\beta}\} \mid \mathrm{x}^{\alpha+\beta} \in \mathrm{supp}(G_0^{(k-1)})\right\}$$

  2. 弦扩张：$G_0^{(k)} = (F_0^{(k)})'$

# TSSOS 迭代程序

- 对于图 $G(V,E)$，$V=[\mathbf{x}]_r$，定义

$$\mathrm{supp}(G) := \left\{\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}} \mid \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta} \text{ 或} \{\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}\} \in E\right\}$$

- 令 $G_0^{(0)} := G^{\mathrm{tsp}}$. 定义图的升链 $(G_0^{(k)})_{k\geq 1}$：

1. 支撑扩张：令图 $F_0^{(k)}$ 具有顶点集 $[\mathbf{x}]_r$ 和边集

$$E(F_0^{(k)}) := \left\{\{\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}\} \mid \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}} \in \mathrm{supp}(G_0^{(k-1)})\right\}$$

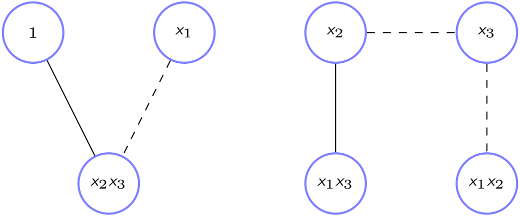
2. 弦扩张：$G_0^{(k)} = (F_0^{(k)})'$

# 支撑扩张

- 考虑图 $G(V, E)$:

$$V = \{1, x_1, x_2, x_3, x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2\}$$

$$E = \{\{1, x_2x_3\}, \{x_2, x_1x_3\}\}$$

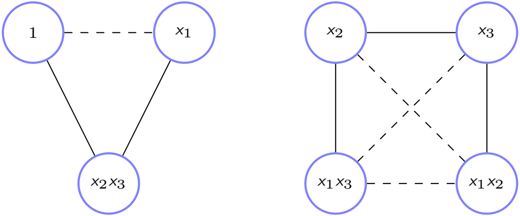


# 最大弦扩张

- 考虑图 $G(V,E)$:

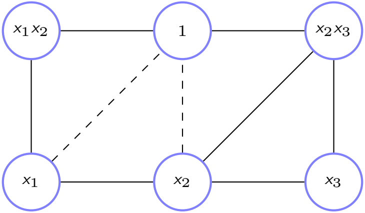
$$V=\{1,x_1,x_2,x_3,x_2x_3,x_1x_3,x_1x_2\}$$

$$E=\{\{1,x_2x_3\},\{x_2,x_1x_3\},\{x_1,x_2x_3\},\{x_2,x_3\},\{x_3,x_1x_2\}\}$$



# （近似）最小弦扩张

- $f = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1^2x_2 + x_1^2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_2^2x_3 - x_2x_3^2 + x_2^2x_3^2$
- **单项式基**：$\{1, x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_2x_3\}$



# TSSOS 松弛

- 对每个不等式约束 $g_i \geq 0$，用类似的方式定义图列 $(G_i^{(k)})_{k\geq 1}$
- 令 $B(G_i^{(k)})$ 是 $G_i^{(k)}$ 的邻接矩阵
- TSSOS 松弛:

$$\begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{y}} & L_{\mathbf{y}}(f) \\ \text{s.t.} & B(G_0^{(k)}) \circ \mathbf{M}_r(\mathbf{y}) \in \mathbb{S}^+(G_0^{(k)}, ?) \\ & B(G_i^{(k)}) \circ \mathbf{M}_{r-d_i}(g_i\mathbf{y}) \in \mathbb{S}^+(G_i^{(k)}, ?),\ i \in [m] \\ & y_{\mathbf{0}} = 1 \end{cases}$$

# 半正定补全矩阵刻画

**定理**

设 $G$ 是弦图，$\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_t$ 是 $G$ 的极大团集. 则 $Q \in \mathbb{S}^{+}(G, ?)$ 当且仅当 $Q_{\mathcal{C}_i} \succeq 0,\ i = 1, \ldots, t.$

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & ? \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ ? & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \succeq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ & & & \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} & & & \\ & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \succeq 0$$

# TSSOS 松弛

1. 取 $G_0^{(k)}$ 的所有极大团：$\mathcal{C}_1^0, \ldots, \mathcal{C}_{t_0}^0$
2. 对每个极大团 $\mathcal{C}_p^0$，取 $\mathbf{M}_r(\mathbf{y})$ 的主子矩阵$\mathbf{M}_{\mathcal{C}_p^0}(\mathbf{y})$
3. 类似地，取局部化矩阵 $\mathbf{M}_{r-d_i}(g_i\mathbf{y})$ 的主子矩阵$\mathbf{M}_{\mathcal{C}_p^i}(\mathbf{y})$
4. 构造分块矩-平方和松弛 $\rightsquigarrow$ TSSOS 松弛

$$\lambda_r^{(k)} := \begin{cases} \inf & L_{\mathbf{y}}(f) \\ \text{s.t.} & \mathbf{M}_{\mathcal{C}_p^0}(\mathbf{y}) \succeq 0, \quad p \in [t_0] \\ & \mathbf{M}_{\mathcal{C}_p^i}(g_i\mathbf{y}) \succeq 0, \quad p \in [t_i], i \in [m] \\ & y_{\mathbf{0}} = 1 \end{cases}$$

# TSSOS 松弛分层的性质

- 对于 QCQP，$\lambda_1^{(1)} = \lambda_1$
- 固定稀疏阶数 $k$，序列 $(\lambda_r^{(k)})_{r \geq r_{\min}}$ 单调非减
- 固定松弛阶数 $r$，序列 $(\lambda_r^{(k)})_{k \geq 1}$ 单调非减
- 使用最大弦扩张，序列 $(\lambda_r^{(k)})_{k \geq 1}$ 有限步收敛到 $\lambda_r$

# 双层下界网络

$$
\begin{array}{ccccccc}
\lambda_{r_{\min}}^{(1)} & \leq & \lambda_{r_{\min}}^{(2)} & \leq & \cdots & \leq & \lambda_{r_{\min}} \\
\wedge\!| & & \wedge\!| & & & & \wedge\!| \\
\lambda_{r_{\min}+1}^{(1)} & \leq & \lambda_{r_{\min}+1}^{(2)} & \leq & \cdots & \leq & \lambda_{r_{\min}+1} \\
\wedge\!| & & \wedge\!| & & & & \wedge\!| \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\wedge\!| & & \wedge\!| & & & & \wedge\!| \\
\lambda_{r}^{(1)} & \leq & \lambda_{r}^{(2)} & \leq & \cdots & \leq & \lambda_{r} \\
\wedge\!| & & \wedge\!| & & & & \wedge\!| \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

# SDSOS 优化

- DD 矩阵 $Q \in \mathbb{S}^n$： $Q_{ii} \geq \sum_{j \neq i} |Q_{ij}|,\ i \in [n]$
- SDD 矩阵 $Q \in \mathbb{S}^n$： 存在对角矩阵 $D$ 使得 $DQD$ 是对角占优矩阵
- SDSOS 多项式 $f(\mathbf{x})$： 存在一个 Gram 矩阵是 SDD 矩阵
- SDSOS 优化：

$$\lambda_{\mathrm{sdsos}} := \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \mid f(\mathbf{x}) - \lambda \in \mathrm{SDSOS}\}$$

  - $\lambda_{\mathrm{sdsos}} \leq \lambda^{(1)}$

# SDSOS 优化

- DD 矩阵 $Q \in \mathbb{S}^n$： $Q_{ii} \geq \sum_{j \neq i} |Q_{ij}|,\ i \in [n]$
- SDD 矩阵 $Q \in \mathbb{S}^n$： 存在对角矩阵 $D$ 使得 $DQD$ 是对角占优矩阵
- SDSOS 多项式 $f(\mathbf{x})$： 存在一个 Gram 矩阵是 SDD 矩阵
- SDSOS 优化：

$$\lambda_{\text{sdsos}} := \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \mid f(\mathbf{x}) - \lambda \in \text{SDSOS}\}$$

➤ $\lambda_{\text{sdsos}} \leq \lambda^{(1)}$

# SDSOS 优化

- DD 矩阵 $Q \in \mathbb{S}^n$： $Q_{ii} \geq \sum_{j \neq i} |Q_{ij}|$, $i \in [n]$
- SDD 矩阵 $Q \in \mathbb{S}^n$： 存在对角矩阵 $D$ 使得 $DQD$ 是对角占优矩阵
- SDSOS 多项式 $f(\mathbf{x})$： 存在一个 Gram 矩阵是 SDD 矩阵
- SDSOS 优化：

$$\lambda_{\mathrm{sdsos}} := \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \mid f(\mathbf{x}) - \lambda \in \mathrm{SDSOS}\}$$

➤ $\lambda_{\mathrm{sdsos}} \leq \lambda^{(1)}$

# 符号对称性

- **符号对称性**：二元向量 $\theta \in \{-1,1\}^n$ 使得

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \quad f(\mathbf{x}) = f(\theta \circ \mathbf{x})$$

- $f = x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2$
  - $\theta_1 = (-1,-1,1)$, $\theta_2 = (1,1,-1)$

# 符号对称性

- **符号对称性**：二元向量 $\theta \in \{-1,1\}^n$ 使得

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \quad f(\mathbf{x}) = f(\theta \circ \mathbf{x})$$

- $f = x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2$
  - $\theta_1 = (-1,-1,1)$, $\theta_2 = (1,1,-1)$

# 符号对称性诱导分块结构

- 二元矩阵 $R$: $f(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ 的所有符号对称性
- 在 $[\mathbf{x}]_r$ 上定义等价关系 $\sim$:

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \sim \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}} \iff R^{\intercal}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) \equiv 0 \mod 2$$

➤ $[\mathbf{x}]_r = \bigsqcup_{p=1}^{t_0} \mathcal{B}_p^0$

➤ $[\mathbf{x}]_{r-d_i} = \bigsqcup_{p=1}^{t_i} \mathcal{B}_p^i$

- $f = x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2$: $\{1, x_1x_2, x_1^2, x_2^2, x_3^2\}, \{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \{x_1x_3, x_2x_3\}$

# 符号对称性诱导分块结构

- 二元矩阵 $R$: $f(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ 的所有符号对称性
- 在 $[\mathbf{x}]_r$ 上定义等价关系 $\sim$:

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \sim \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}} \iff R^{\intercal}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) \equiv 0 \mod 2$$

➤ $[\mathbf{x}]_r = \bigsqcup_{p=1}^{t_0} \mathcal{B}_p^0$

➤ $[\mathbf{x}]_{r-d_i} = \bigsqcup_{p=1}^{t_i} \mathcal{B}_p^i$

- $f = x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2$: $\{1, x_1x_2, x_1^2, x_2^2, x_3^2\}, \{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \{x_1x_3, x_2x_3\}$

# TSSOS 与符号对称性

➤ TSSOS 迭代给出的分块结构是符号对称性诱导的分块结构的加细

**定理** (Wang, Magron, and Lasserre, 2021)

固定松弛阶数 $r$, 使用最大弦扩张. 则 *TSSOS* 迭代给出的分块结构在有限步内收敛到符号对称性诱导的分块结构.

# TSSOS 与符号对称性

- TSSOS 迭代给出的分块结构是符号对称性诱导的分块结构的加细

**定理** (Wang, Magron, and Lasserre, 2021)

固定松弛阶数 $r$, 使用最大弦扩张. 则 *TSSOS* 迭代给出的分块结构在有限步内收敛到符号对称性诱导的分块结构.

# 稀疏 Putinar's Positivstellensatz

**定理** (Wang, Magron, and Lasserre, 2021)

假设 $\mathcal{Q}(\mathbf{g})$ 满足阿基米德条件. 令 $R$ 是 $f(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ 的所有符号对称性给出的二元矩阵. 如果 $f$ 在 $S$ 上是严格正的, 则 $f$ 有表示

$$f = \sigma_0 + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i g_i,$$

其中 $\sigma_i$ 是 $SOS$ 满足 $R^\intercal \boldsymbol{\alpha} \equiv 0 \mod 2, \forall \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{supp}(\sigma_i), i = 0, \ldots, m.$

# 软件

- `TSSOS`：基于稀疏平方和松弛的多项式优化软件包
- `GloptiPoly`：基于矩松弛的多项式优化软件包
- `Yalmip`：通用的优化平台，包含 SOS 优化模块
- `MOSEK`：商业 SDP 求解器

# 随机生成的平方和多项式

- $f = \sum_{i=1}^{t} f_i^2 \in \textbf{randpoly1}(n, 2d, t, p)$

| $n$ | $2d$ | TSSOS (Min) | TSSOS (Max) | GloptiPoly | Yalmip |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 8 | 0.24 | 1.7 | 306 | 10 |
| 8 | 10 | 0.58 | 4.8 | - | 92 |
| 9 | 10 | 0.50 | 3.2 | - | 44 |
| 10 | 12 | 2.2 | 12 | - | 474 |
| 10 | 16 | 36 | 15 | - | - |
| 12 | 12 | 8.4 | 61 | - | - |

# 随机生成的具有单形牛顿多面体的多项式

- $f = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{2d} + \sum_{j=1}^{s-n-1} c_j' \mathbf{x}^{\alpha_j} \in \textbf{randpoly2}(n, 2d, s)$

| $n$ | $2d$ | TSSOS (Min) | TSSOS (Max) | GloptiPoly | Yalmip |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 8 | 0.36 | 8.5 | 346 | 31 |
| 9 | 8 | 1.0 | 40 | - | - |
| 9 | 10 | 6.6 | 24 | - | 322 |
| 10 | 8 | 1.2 | 13 | - | - |
| 11 | 8 | 1.7 | 13 | - | 655 |
| 12 | 8 | 10 | 693 | - | - |

# 下次课

- 变量稀疏（CS）

# 参考文献


- Jie Wang and Victor Magron, **Sparse Polynomial Optimization: Theory and Practice**, World Scientific Publishing, 2023.
- Jie Wang, Victor Magron, and Jean B. Lasserre, **TSSOS: A Moment-SOS hierarchy that exploits term sparsity**, SIAM Journal on Optimization, 2021.
- Jie Wang, Victor Magron, and Jean B. Lasserre, **Chordal-TSSOS: a moment-SOS hierarchy that exploits term sparsity with chordal extension**, SIAM Journal on Optimization, 2021.

# 更多信息见个人主页

https://wangjie212.github.io/jiewang