多项式优化：理论与实践

王杰（中科院数学与系统科学研究院）

第十三届中国数学会计算机数学大会

2023 年 6 月 16 日

合作者

Jean B. Lasserre

Victor Magron

目录

目录

目录

多项式优化

- 多项式优化问题：

$$f_{\min} := \begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} & g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, l \end{cases}$$

- 非凸，NP-难
- 运筹控制、量子信息、量子力学、神经网络、计算机视觉、电力系统、张量计算、计算复杂度、机器证明、信号处理、图形图像、程序验证

多项式优化

- 多项式优化问题:

$$f_{\min} := \begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} & g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, l \end{cases}$$

- 非凸, NP-难
- 运筹控制、量子信息、量子力学、神经网络、计算机视觉、电力系统、张量计算、计算复杂度、机器证明、信号处理、图形图像、程序验证

多项式优化

- 多项式优化问题:

$$f_{\min} := \begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} & g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, l \end{cases}$$

- 非凸, NP-难
- 运筹控制、量子信息、量子力学、神经网络、计算机视觉、电力系统、张量计算、计算复杂度、机器证明、信号处理、图形图像、程序验证

为什么研究多项式优化？

- 强大的建模能力与广泛应用：二次约束二次规划、二元优化问题、混合整数（非）线性规划等
- 与实代数几何紧密的内在联系：多项式的正性表示、凸代数几何
- 可求得全局最优值（解）：Moment-SOS 半定松弛分层
- 与理论计算机科学密切的联系：近似算法、计算复杂度理论

为什么研究多项式优化？

- 强大的建模能力与广泛应用：二次约束二次规划、二元优化问题、混合整数（非）线性规划等
- 与实代数几何紧密的内在联系：多项式的正性表示、凸代数几何
- 可求得全局最优值（解）：Moment-SOS 半定松弛分层
- 与理论计算机科学密切的联系：近似算法、计算复杂度理论

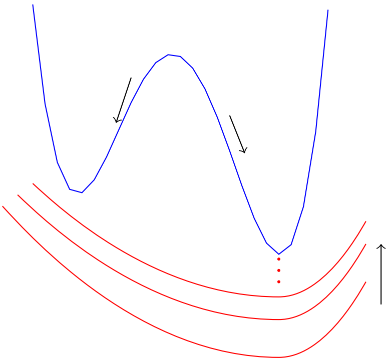
为什么研究多项式优化？

- **强大的建模能力与广泛应用**：二次约束二次规划、二元优化问题、混合整数（非）线性规划等
- **与实代数几何紧密的内在联系**：多项式的正性表示、凸代数几何
- **可求得全局最优值（解）**：Moment-SOS 半定松弛分层
- 与理论计算机科学密切的联系：近似算法、计算复杂度理论

为什么研究多项式优化？

- 强大的建模能力与广泛应用：二次约束二次规划、二元优化问题、混合整数（非）线性规划等
- 与实代数几何紧密的内在联系：多项式的正性表示、凸代数几何
- 可求得全局最优值（解）：Moment-SOS 半定松弛分层
- 与理论计算机科学密切的联系：近似算法、计算复杂度理论

多项式优化的非凸性



例子（moment 松弛）

$$\begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{x}} & x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} & 1 - x_1^2 \geq 0, 1 - x_2^2 \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{x}} & x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} = [1, x_1, x_2] \cdot [1, x_1, x_2]^{\mathsf{T}} \succeq 0, \\ & 1 - x_1^2 \geq 0, 1 - x_2^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{y}} & y_{2,0} + y_{1,1} + y_{0,2} \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} 1 & y_{1,0} & y_{0,1} \\ y_{1,0} & y_{2,0} & y_{1,1} \\ y_{0,1} & y_{1,1} & y_{0,2} \end{bmatrix} \succeq 0, \\ & 1 - y_{2,0} \geq 0, 1 - y_{0,2} \geq 0, \\ & \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ s.t. } \mathbf{y} = (x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2) \end{cases} \xRightarrow{\textit{relax}} \textbf{(Moment)} \begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{y}} & y_{2,0} + y_{1,1} + y_{0,2} \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} 1 & y_{1,0} & y_{0,1} \\ y_{1,0} & y_{2,0} & y_{1,1} \\ y_{0,1} & y_{1,1} & y_{0,2} \end{bmatrix} \succeq 0, \\ & 1 - y_{2,0} \geq 0, 1 - y_{0,2} \geq 0 \end{cases}$$

Moment 矩阵和局部化矩阵

- $\mathbb{N}_r^n := \{\boldsymbol{\beta} = (\beta_i) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{i=1}^n \beta_i \leq r\}$
- r 阶moment 矩阵 $\mathbf{M}_r(\mathbf{y})$：

$$[\mathbf{M}_r(\mathbf{y})]_{\beta\gamma} := y_{\beta+\gamma}, \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \gamma \in \mathbb{N}_r^n$$

- 给定 $g = \sum_\alpha g_\alpha \mathbf{x}^\alpha$，$r$ 阶局部化矩阵 $\mathbf{M}_r(g\mathbf{y})$：

$$[\mathbf{M}_r(g\mathbf{y})]_{\beta\gamma} := \sum_\alpha g_\alpha y_{\alpha+\beta+\gamma}, \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \gamma \in \mathbb{N}_r^n$$

- $\mathbf{x} = x,\ \ g = 1 - x^2$：

$$\mathbf{M}_2(\mathbf{y}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}_1(g\mathbf{y}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ x \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & x \end{array} \\ \begin{bmatrix} y_0 - y_2 & y_1 - y_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Moment 矩阵和局部化矩阵

- $\mathbb{N}_r^n := \{\boldsymbol{\beta} = (\beta_i) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{i=1}^n \beta_i \le r\}$
- r 阶moment 矩阵 $\mathbf{M}_r(\mathbf{y})$：

$$[\mathbf{M}_r(\mathbf{y})]_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}} := y_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}}, \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}_r^n$$

- 给定 $g = \sum_{\alpha} g_\alpha \mathbf{x}^\alpha$，$r$ 阶局部化矩阵 $\mathbf{M}_r(g\mathbf{y})$：

$$[\mathbf{M}_r(g\mathbf{y})]_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}} := \sum_{\alpha} g_\alpha y_{\alpha+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}}, \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}_r^n$$

- $\mathbf{x} = x$，$g = 1 - x^2$：

$$\mathbf{M}_2(\mathbf{y}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}_1(g\mathbf{y}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ x \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & x \end{array} \\ \begin{bmatrix} y_0 - y_2 & y_1 - y_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Moment 矩阵和局部化矩阵

- $\mathbb{N}_r^n := \{\boldsymbol{\beta} = (\beta_i) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{i=1}^n \beta_i \leq r\}$
- r 阶moment 矩阵 $\mathbf{M}_r(\mathbf{y})$：

$$[\mathbf{M}_r(\mathbf{y})]_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}} := y_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}}, \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}_r^n$$

- **给定** $g = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} g_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$， r 阶局部化矩阵 $\mathbf{M}_r(g\mathbf{y})$：

$$[\mathbf{M}_r(g\mathbf{y})]_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}} := \sum_{\boldsymbol{\alpha}} g_{\boldsymbol{\alpha}} y_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}}, \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}_r^n$$

- $\mathbf{x} = x$， $g = 1 - x^2$：

$$\mathbf{M}_2(\mathbf{y}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}_1(g\mathbf{y}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ x \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & x \end{array} \\ \begin{bmatrix} y_0 - y_2 & y_1 - y_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Moment 矩阵和局部化矩阵

- $\mathbb{N}^n_r := \{\boldsymbol{\beta} = (\beta_i) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{i=1}^n \beta_i \le r\}$
- r 阶moment 矩阵 $\mathbf{M}_r(\mathbf{y})$：

$$[\mathbf{M}_r(\mathbf{y})]_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}} := y_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}}, \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}^n_r$$

- 给定 $g = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} g_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$，$r$ 阶局部化矩阵 $\mathbf{M}_r(g\mathbf{y})$：

$$[\mathbf{M}_r(g\mathbf{y})]_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}} := \sum_{\boldsymbol{\alpha}} g_{\boldsymbol{\alpha}} y_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}}, \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}^n_r$$

- $\mathbf{x} = x$，$g = 1 - x^2$：

$$\mathbf{M}_2(\mathbf{y}) = \begin{array}{c|ccc} & 1 & x & x^2 \\ \hline 1 & & & \\ x & & \left[\begin{matrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix}\right] & \\ x^2 & & & \end{array}, \quad \mathbf{M}_1(g\mathbf{y}) = \begin{array}{c|cc} & 1 & x \\ \hline 1 & & \\ x & \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{matrix} y_0 - y_2 & y_1 - y_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_4 \end{matrix}\right]} \end{array}$$

- Moment 松弛 (Lasserre 2001):

$$\theta_r := \begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{y}} & L_{\mathbf{y}}(f) \\ \text{s.t.} & \mathbf{M}_r(\mathbf{y}) \succeq 0, \\ & \mathbf{M}_{r-d_i}(g_i\mathbf{y}) \succeq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ & \mathbf{M}_{r-d_j}(h_j\mathbf{y}) = 0, \quad j = 1, \ldots, l, \\ & y_{\mathbf{0}} = 1. \end{cases}$$

例子（SOS 松弛）

$$\begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{x}} & x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} & 1 - x_1^2 \geq 0, 1 - x_2^2 \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sup\limits_{\lambda} & \lambda \\ \text{s.t.} & x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - \lambda \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ s.t. } (1 - x_1^2 \geq 0, 1 - x_2^2 \geq 0) \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{relax}} \textbf{(SOS)} \begin{cases} \sup\limits_{\lambda} & \lambda \\ \text{s.t.} & x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - \lambda = \sigma_0 + \sigma_1(1 - x_1^2) + \sigma_2(1 - x_2^2), \\ & \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \in \text{SOS} \end{cases}$$

基础半代数集上的正性

- $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1 \geq 0, \ldots, g_m \geq 0, h_1 = 0, \ldots, h_l = 0\}$

定理 (Putinar's Positivstellensatz，1993)

假设 $\mathcal{Q}(\mathbf{g}, \mathbf{h})$ 满足*Archimedean* 条件。若 f 在 S 上是严格正的，则

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \cdots + \sigma_m g_m + \tau_1 h_1 + \cdots + \tau_l h_l,$$

其中 $\sigma_0, \ldots, \sigma_m$ 是 *SOS* 多项式，$\tau_1, \ldots, \tau_l$ 是多项式。

对偶 SOS 松弛

- 对偶 SOS 松弛（Parrilo 2000 & Lasserre 2001）:

$$\theta_r^* = \begin{cases} \sup\limits_{\lambda,\sigma_j} & \lambda \\ \text{s.t.} & f - \lambda = \sigma_0 + \sum_{i=1}^m \sigma_i g_i + \sum_{j=1}^l \tau_j h_j, \\ & \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m \in \Sigma(\mathbf{x}), \\ & \deg(\sigma_0) \le 2r, \deg(\sigma_i g_i) \le 2r, \deg(\tau_j h_j) \le 2r. \end{cases}$$

Moment-SOS/Lasserre 半定松弛分层

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & f_{\min} & & & \\
 & & \rotatebox{-45}{$\leq$} & & \rotatebox{45}{$\geq$} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \rotatebox{90}{$\geq$} & & \rotatebox{90}{$\geq$} & & \\
\color{red}{\text{（moment 松弛）}} & & \theta_r & \text{“}=\text{”} & \theta_r^* & & \color{red}{\text{（SOS 松弛）}} \\
 & & \rotatebox{90}{$\geq$} & & \rotatebox{90}{$\geq$} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \rotatebox{90}{$\geq$} & & \rotatebox{90}{$\geq$} & & \\
 & & \theta_{r_{\min}} & \text{“}=\text{”} & \theta_{r_{\min}}^* & &
\end{array}
$$

渐进收敛性与有限收敛性

- 假定 Archimedean 条件：存在 $N > 0$ 使得 $N - \|\mathbf{x}\|^2 \in \mathcal{Q}(\mathbf{g}, \mathbf{h})$
  - $\theta_r \uparrow f_{\min}$ 和 $\theta_r^* \uparrow f_{\min}$ 当 $r \to \infty$ （Lassere, 2001）
  - 一般地有限收敛性成立（Nie, 2014）

渐进收敛性与有限收敛性

- 假定 Archimedean 条件：存在 $N > 0$ 使得 $N - \|\mathbf{x}\|^2 \in \mathcal{Q}(\mathbf{g}, \mathbf{h})$
  - $\theta_r \uparrow f_{\min}$ 和 $\theta_r^* \uparrow f_{\min}$ 当 $r \to \infty$（Lassere, 2001）
  - 一般地有限收敛性成立（Nie, 2014）

渐进收敛性与有限收敛性

- 假定 Archimedean 条件：存在 $N > 0$ 使得 $N - \|\mathbf{x}\|^2 \in \mathcal{Q}(\mathbf{g}, \mathbf{h})$
  - ➤ $\theta_r \uparrow f_{\min}$ 和 $\theta_r^* \uparrow f_{\min}$ 当 $r \to \infty$（Lassere, 2001）
  - ➤ 一般地**有限收敛性**成立（Nie, 2014）

全局最优性条件

- Moment 松弛取到全局最优（$\theta_r = f_{\min}$）当下列条件之一满足：
  - 对某个 $r_{\min} \le r' \le r$，有 $\operatorname{rank} \mathbf{M}_{r'-r_{\min}}(\mathbf{y}) = \operatorname{rank} \mathbf{M}_{r'}(\mathbf{y})$
    - $\rightsquigarrow$ 可提取 $\operatorname{rank} \mathbf{M}_{r'}(\mathbf{y})$ 个全局最优解
  - $\operatorname{rank} \mathbf{M}_{r_{\min}}(\mathbf{y}) = 1$
    - $\rightsquigarrow$ 可提取一个全局最优解

全局最优性条件

- Moment 松弛取到全局最优（$\theta_r = f_{\min}$）当下列条件之一满足：
  - 对某个 $r_{\min} \leq r' \leq r$，有 $\operatorname{rank} \mathbf{M}_{r'-r_{\min}}(\mathbf{y}) = \operatorname{rank} \mathbf{M}_{r'}(\mathbf{y})$
    - ⇝ 可提取 $\operatorname{rank} \mathbf{M}_{r'}(\mathbf{y})$ 个全局最优解
  - $\operatorname{rank} \mathbf{M}_{r_{\min}}(\mathbf{y}) = 1$
    - ⇝ 可提取一个全局最优解

全局最优性条件

- Moment 松弛取到全局最优（$\theta_r = f_{\min}$）当下列条件之一满足：
  - 对某个 $r_{\min} \le r' \le r$，有 $\operatorname{rank} \mathbf{M}_{r'-r_{\min}}(\mathbf{y}) = \operatorname{rank} \mathbf{M}_{r'}(\mathbf{y})$
    - $\rightsquigarrow$ 可提取 $\operatorname{rank} \mathbf{M}_{r'}(\mathbf{y})$ 个全局最优解
  - $\operatorname{rank} \mathbf{M}_{r_{\min}}(\mathbf{y}) = 1$
    - $\rightsquigarrow$ 可提取一个全局最优解

Moment-SOS 分层的理论研究

- **收敛速率**：紧集、球面、单形、超立方体 (Klerk & Laurent)
- **近似度**：一阶 $\rightsquigarrow$ 最大割问题 ≈ 0.878 (Goemans & Williamson, 1995)
- **准确性**：一阶、二阶（秩 1 矩阵补全)、高阶 (Hua & Qu, 2021)
- **加强**：Lagrange 乘子的多项式表达 (Nie, 2019)

Moment-SOS 分层的计算瓶颈

- r 阶 SOS 松弛对应 SDP 问题的规模：
  1. PSD 矩阵大小： $\binom{n+r}{r}$
  2. 等式约束个数： $\binom{n+2r}{2r}$
- $r=2$，$n<30$（MOSEK）
- 利用结构：
  - 约化的单项式基
  - 商环
  - 对称性
  - 稀疏性

Moment-SOS 分层的计算瓶颈

- r 阶 SOS 松弛对应 SDP 问题的规模：
  1. PSD 矩阵大小： $\binom{n+r}{r}$
  2. 等式约束个数： $\binom{n+2r}{2r}$
- $r = 2$， $n < 30$ （MOSEK）
- 利用结构：
  - 约化的单项式基
  - 商环
  - 对称性
  - 稀疏性

Moment-SOS 分层的计算瓶颈

- r 阶 SOS 松弛对应 SDP 问题的规模：
  1. PSD 矩阵大小：$\binom{n+r}{r}$
  2. 等式约束个数：$\binom{n+2r}{2r}$
- $r=2$，$n<30$（MOSEK）
- 利用结构：
  - 约化的单项式基
  - 商环
  - 对称性
  - 稀疏性

变量（correlative）稀疏性（Waki et al. 2006）

- 变量稀疏型（csp）图 $G^{\text{csp}}(V,E)$：
  - $V := \{x_1,\ldots,x_n\}$
  - $\{x_i,x_j\} \in E \iff x_i, x_j$ 出现在 f 的同一项或同一个约束多项式 g_k 或 h_k 中
- 对 $G^{\text{csp}}(V,E)$ 的每一个极大团，

$$I_k \longmapsto \mathbf{M}_r(\mathbf{y},I_k), \mathbf{M}_{r-d_i}(g_i\mathbf{y},I_k), \mathbf{M}_{r-d_j}(h_j\mathbf{y},I_k)$$

变量（correlative）稀疏性（Waki et al. 2006）

- 变量稀疏型（csp）图 $G^{\mathrm{csp}}(V,E)$：
  - $V := \{x_1,\ldots,x_n\}$
  - $\{x_i,x_j\} \in E \Longleftrightarrow x_i,x_j$ 出现在 f 的同一项或同一个约束多项式 g_k 或 h_k 中
- 对 $G^{\mathrm{csp}}(V,E)$ 的每一个极大团，

$$I_k \longmapsto \mathbf{M}_r(\mathbf{y},I_k),\mathbf{M}_{r-d_i}(g_i\mathbf{y},I_k),\mathbf{M}_{r-d_j}(h_j\mathbf{y},I_k)$$

项稀疏性（Wang & Magron & Lasserre，2021）

- 项稀疏型（tsp）图 $G^{\text{tsp}}(V,E)$：
  - $V := v_r = \{1, x_1, \ldots, x_n, x_1^r, \ldots, x_n^r\}$
  - $\{\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}\} \in E \Longleftrightarrow$

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}} \in \operatorname{supp}(f) \cup \bigcup_{i=1}^{m} \operatorname{supp}(g_i) \cup \bigcup_{j=1}^{l} \operatorname{supp}(h_j) \cup v_r^2$$

$$\begin{array}{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta} \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \cdots & \boldsymbol{\alpha} & \cdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & y_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{M}_r(\mathbf{y})$$

变量-项联合稀疏性

1. 利用变量稀疏性分解变量
2. 对子系统利用项稀疏性

变量-项联合稀疏性

1. 利用变量稀疏性分解变量
2. 对子系统利用项稀疏性

扩展

- 复多项式优化 $\rightsquigarrow$ 最优电力流
- 三角多项式优化 $\rightsquigarrow$ 信号处理
- 多项式矩阵优化 $\rightsquigarrow$ 控制
- SOS 规划 $\rightsquigarrow$ 联合谱半径计算
- 广义矩问题 $\rightsquigarrow$ 控制
- 非交换/trace/state/moment 多项式优化 $\rightsquigarrow$ 量子多项式优化

软件

- TSSOS：基于 JuMP，用户友好，支持交换/复/非交换多项式优化

https://github.com/wangjie212/TSSOS

- SparseJSR，SparseDynamicSystem

最优电力流问题（AC-OPF）

$$
\begin{cases}
\inf\limits_{V_i, S_k^g \in \mathbb{C}} & \sum\limits_{k \in G} \left(\mathbf{c}_{2k} \Re(S_k^g)^2 + \mathbf{c}_{1k} \Re(S_k^g) + \mathbf{c}_{0k} \right) \\
\text{s.t.} & \angle V_r = 0, \\
& \mathbf{S}_k^{gl} \le S_k^g \le \mathbf{S}_k^{gu}, \quad \forall k \in G, \\
& \boldsymbol{v}_i^l \le |V_i| \le \boldsymbol{v}_i^u, \quad \forall i \in N, \\
& \sum_{k \in G_i} S_k^g - \mathbf{S}_i^d - \mathbf{Y}_i^s |V_i|^2 = \sum_{(i,j) \in E_i \cup E_i^R} S_{ij}, \quad \forall i \in N, \\
& S_{ij} = (\mathbf{Y}_{ij}^* - \mathbf{i} \frac{\mathbf{b}_{ij}^c}{2}) \frac{|V_i|^2}{|\mathbf{T}_{ij}|^2} - \mathbf{Y}_{ij}^* \frac{V_i V_j^*}{\mathbf{T}_{ij}}, \quad \forall (i,j) \in E, \\
& S_{ji} = (\mathbf{Y}_{ij}^* - \mathbf{i} \frac{\mathbf{b}_{ij}^c}{2}) |V_j|^2 - \mathbf{Y}_{ij}^* \frac{V_i^* V_j}{\mathbf{T}_{ij}^*}, \quad \forall (i,j) \in E, \\
& |S_{ij}| \le \mathbf{s}_{ij}^u, \quad \forall (i,j) \in E \cup E^R, \\
& \boldsymbol{\theta}_{ij}^{\Delta l} \le \angle (V_i V_j^*) \le \boldsymbol{\theta}_{ij}^{\Delta u}, \quad \forall (i,j) \in E.
\end{cases}
$$

最优电力流问题（AC-OPF）

n	m+l	CS ($r=2$)				CS+TS ($r=2, s=1$)			
		mb	opt	time (s)	gap	mb	opt	time (s)	gap
12	28	28	1.1242e4	0.21	0.00%	22	1.1242e4	0.09	0.00%
20	55	28	1.7543e4	0.56	0.05%	22	1.7543e4	0.30	0.05%
72	297	45	4.9927e3	4.43	0.07%	22	4.9920e3	2.69	0.08%
114	315	120	7.6943e4	94.9	0.00%	39	7.6942e4	14.8	0.00%
344	1325	253	–	–	–	73	1.0470e5	169	0.50%
348	1809	253	–	–	–	34	1.2096e5	201	0.03%
766	3322	153	3.3072e6	585	0.68%	44	3.3042e6	33.9	0.77%
1112	4613	496	–	–	–	31	7.2396e4	410	0.25%
4356	18257	378	–	–	–	27	1.3953e6	934	0.51%
6698	29283	1326	–	–	–	76	5.9858e5	1886	0.47%

基于流形优化求解低秩 SDP

- 退化：二阶以上松弛 $\rightsquigarrow$ $m \gg n$
- 低秩：$\operatorname{rank} \mathbf{M}^{\mathrm{opt}} \ll n \rightsquigarrow \mathbf{M} = YY^\intercal$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times p}$ (Burer-Monteiro 分解)
- 单位对角：$\mathbf{M}_{ii} = 1, i = 1, \ldots, n$
- 常数迹：$\mathrm{tr}(\mathbf{M}) = c$

➤ $\mathcal{N}(n,p) := \{Y \in \mathbb{R}^{n \times p} \mid \|Y(k,:)\| = 1, k = 1, \ldots, n\}$

基于流形优化求解低秩 SDP

- 退化：二阶以上松弛 $\rightsquigarrow m \gg n$
- 低秩：$\operatorname{rank} \mathbf{M}^{\mathrm{opt}} \ll n \rightsquigarrow \mathbf{M} = YY^{\intercal},\ Y \in \mathbb{R}^{n \times p}$ (Burer-Monteiro 分解)
- 单位对角：$\mathbf{M}_{ii} = 1, i = 1, \ldots, n$
- 常数迹：$\operatorname{tr}(\mathbf{M}) = c$

➤ $\mathcal{N}(n, p) := \{Y \in \mathbb{R}^{n \times p} \mid \|Y(k,:)\| = 1, k = 1, \ldots, n\}$

增广拉格朗日方法

$$\begin{cases} \inf\limits_{X\succeq 0} & \langle C, X\rangle \\ \text{s.t.} & \mathcal{A}(X) = b, \; \mathcal{B}(X) = d \end{cases}$$

利用 ALM

$\rightsquigarrow$ 定义流形

- 增广拉格朗日函数：

$$L_\sigma(X, y) = \langle C, X\rangle - y^\intercal(\mathcal{A}(X) - b) + \frac{\sigma}{2}\|\mathcal{A}(X) - b\|^2$$

- 第 k 步求解子问题：

$$\min_{X\in\mathcal{M}} L_{\sigma^k}(X, y^k)$$

增广拉格朗日方法

$$\begin{cases} \inf\limits_{X \succeq 0} & \langle C, X \rangle \\ \text{s.t.} & \boxed{\mathcal{A}(X) = b},\ \boxed{\mathcal{B}(X) = d} \rightsquigarrow \text{定义流形} \end{cases}$$

利用 ALM

- **增广拉格朗日函数**：

$$L_\sigma(X, y) = \langle C, X \rangle - y^\intercal(\mathcal{A}(X) - b) + \frac{\sigma}{2}\|\mathcal{A}(X) - b\|^2$$

- 第 k 步求解子问题：

$$\min_{X \in \mathcal{M}} L_{\sigma^k}(X, y^k)$$

增广拉格朗日方法

$$\begin{cases} \inf\limits_{X \succeq 0} & \langle C, X \rangle \\ \text{s.t.} & \mathcal{A}(X) = b, \ \mathcal{B}(X) = d \end{cases}$$

利用 ALM

$\rightsquigarrow$ 定义流形

- 增广拉格朗日函数:

$$L_\sigma(X, y) = \langle C, X \rangle - y^\top (\mathcal{A}(X) - b) + \frac{\sigma}{2} \|\mathcal{A}(X) - b\|^2$$

- 第 k 步求解子问题:

$$\min_{X \in \mathcal{M}} L_{\sigma^k}(X, y^k)$$

黎曼信赖域法求解子问题

令$X = YY^\intercal$。用黎曼信赖域法在关于 Y 的流形$\mathcal{N}$上求解子问题：

$$\min_{Y\in\mathcal{N}} \langle C, YY^\intercal\rangle - (y^k)^\intercal(\mathcal{A}(YY^\intercal) - b) + \frac{\sigma^k}{2}\|\mathcal{A}(YY^\intercal) - b\|^2 \rightsquigarrow \text{非凸！}$$

但是...

我们可以高效逃离鞍点，求解 SDP 到全局最优。

黎曼信赖域法求解子问题

令$X = YY^\intercal$。用黎曼信赖域法在关于 Y 的流形$\mathcal{N}$上求解子问题：

$$\min_{Y\in\mathcal{N}} \langle C, YY^\intercal\rangle - (y^k)^\intercal(\mathcal{A}(YY^\intercal) - b) + \frac{\sigma^k}{2}\|\mathcal{A}(YY^\intercal) - b\|^2 \rightsquigarrow \text{非凸！}$$

但是...

我们可以高效逃离鞍点，求解 SDP 到全局最优。

数值实验

表: BQP 问题 $\min_{\mathbf{x}\in\{-1,1\}^d} \mathbf{x}Q\mathbf{x}^\intercal$， $r=2$[1]

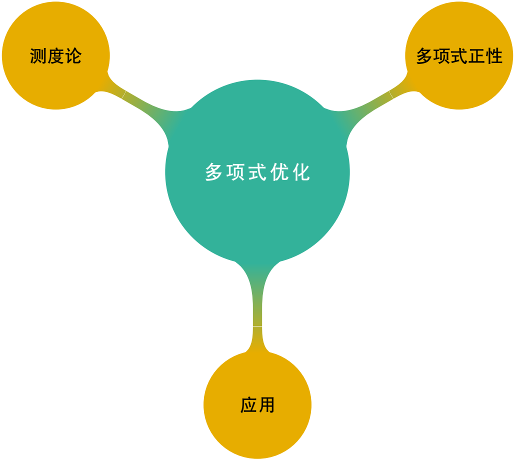
d	n	m	MOSEK 10.0		SDPNAL+		STRIDE		ManiSDP	
			$\eta_{\max}$	time	$\eta_{\max}$	time	$\eta_{\max}$	time	$\eta_{\max}$	time
10	56	1,256	4.4e-11	0.71	1.9e-09	0.65	4.7e-13	0.79	3.2e-15	**0.14**
20	211	16,361	2.7e-11	49.0	3.0e-09	28.8	7.4e-13	6.12	1.2e-14	**0.53**
30	466	77,316	-	-	1.7e-04	187	1.2e-12	65.4	2.4e-14	**3.25**
40	821	236,121	-	-	2.1e-08	813	4.4e-13	249	4.1e-14	**10.5**
50	1,276	564,776	-	-	1.6e-07	3058	7.8e-09	826	6.4e-14	**31.1**
60	1,831	1,155,281	-	-	$*$	$*$	1.3e-12	2118	7.9e-14	**94.3**

[1] -： 内存不足， $*$： $>$10000s

求解大规模多项式优化

POP结构（对称性、稀疏性、商环）
结构化Moment-SOS分层
Moment-SOS性质（低秩、单位对角、常数迹、部分正交）
结构化SDP问题
大规模多项式优化全局求解

总结



更多的结果和应用...

- 计算机视觉 SDP 松弛数值实验
- 切换线性系统稳定性
- 多项式动力系统相关集合逼近
- 非线性 Bell 不等式的最大背离
- 量子多体系统基态能量

主要参考文献

- **Jie Wang**, Victor Magron and Jean B. Lasserre, *TSSOS: A Moment-SOS hierarchy that exploits term sparsity*, SIAM Journal on Optimization, 2021.
- **Jie Wang**, Victor Magron and Jean B. Lasserre, *Chordal-TSSOS: a moment-SOS hierarchy that exploits term sparsity with chordal extension*, SIAM Journal on Optimization, 2021.
- **Jie Wang** and Victor Magron, Exploiting Sparsity in Complex Polynomial Optimization, Journal of Optimization Theory and Applications, 2021.
- **Jie Wang**, Victor Magron, Jean B. Lasserre and Ngoc H. A. Mai, *CS-TSSOS: Correlative and term sparsity for large-scale polynomial optimization*, ACM Transactions on Mathematical Software, 2022.

主要参考文献

- **Jie Wang** and Victor Magron, Exploiting Term Sparsity in Noncommutative Polynomial Optimization, Computational Optimization and Applications, 2021.
- Igor Klep, Victor Magron, Jurij Volčič and **Jie Wang**, State Polynomials: Positivity, Optimization and Nonlinear Bell Inequalities, arXiv, 2023.
- **Jie Wang** and Liangbing Hu, Solving Low-Rank Semidefinite Programs via Manifold Optimization, arXiv, 2023.
- Feng Guo and **Jie Wang**, A Moment-SOS Hierarchy for Robust Polynomial Matrix Inequality Optimization with SOS-Convexity, arXiv, 2023.

新书


Many applications, including computer vision, computer arithmetic, deep learning, entanglement in quantum information, graph theory and energy networks, can be successfully tackled within the framework of polynomial optimization, an emerging field with growing research efforts in the last two decades. One key advantage of these techniques is their ability to model a wide range of problems using optimization formulations. Polynomial optimization heavily relies on the moment-sums of squares (moment-SOS) approach proposed by Lasserre, which provides certificates for positive polynomials. On the practical side, however, there is "no free lunch" and such optimization methods usually encompass severe scalability issues. Fortunately, for many applications, including the ones formerly mentioned, we can look at the problem in the eyes and exploit the inherent data structure arising from the cost and constraints describing the problem.
This book presents several research efforts to resolve this scientific challenge with important computational implications. It provides the development of alternative optimization schemes that scale well in terms of computational complexity, at least in some identified class of problems. It also features a unified modeling framework to handle a wide range of applications involving both commutative and noncommutative variables, and solves concretely large-scale instances. Readers will find a practical section dedicated to the use of available open-source software libraries.
This interdisciplinary monograph is essential reading for students, researchers and professionals interested in solving optimization problems with polynomial input data.
World Scientific
www.worldscientific.com
Q0382 hc
ISSN 2399-1593
ISBN 978-1-80061-294-5
9 781800 612945
Vol. 5
Sparse Polynomial Optimization
Magron
Wang
Series on Optimization and its Applications – Vol. 5
Sparse Polynomial Optimization
Theory and Practice
Victor Magron
Jie Wang
World Scientific

谢谢！

https://wangjie212.github.io/jiewang