非负性、稀疏性与多项式优化

王杰

中国科学院数学与系统科学研究院

2021 年 11 月 24 日

目录

目录

目录

目录

证明多项式非负性

问题

给定 n 元多项式 f，如何证明 f 是非负的？

- 实代数几何的核心问题
- 广泛地出现在其他领域中
- 和多项式优化密切相关
- NP-难

证明多项式非负性

问题

给定 n 元多项式 f，如何证明 f 是非负的？

- 实代数几何的核心问题
- 广泛地出现在其他领域中
- 和多项式优化密切相关
- NP-难

证明多项式非负性

问题

给定 n 元多项式 f，如何证明 f 是非负的？

- 实代数几何的核心问题
- 广泛地出现在其他领域中
- 和多项式优化密切相关
- NP-难

证明多项式非负性

问题

给定 n 元多项式 f，如何证明 f 是非负的？

- 实代数几何的核心问题
- 广泛地出现在其他领域中
- 和多项式优化密切相关
- NP-难

证明多项式非负性

问题

给定 n 元多项式 f，如何证明 f 是非负的？

- 实代数几何的核心问题
- 广泛地出现在其他领域中
- 和多项式优化密切相关
- NP-难

SOS 分解

- SOS（sum of squares）**分解**： $f = f_1^2 + \cdots + f_t^2 \rightsquigarrow f$ 非负

例： $f = 1 + 2x + 2x^2 + 2xy + y^2 = (1+x)^2 + (x+y)^2$

- Hilbert“非负 = SOS”，1888： $n = 1;\ 2d = 2;\ n = 2, 2d = 4$
- Artin，1927： “非负 = 有理 SOS”
- Blekherman，2006： “非负 $\gg$ SOS”， $n \to \infty$
- Motzkin 多项式： $M(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2$

SOS 分解

- SOS（sum of squares）**分解**： $f = f_1^2 + \cdots + f_t^2 \rightsquigarrow f$ 非负

例： $f = 1 + 2x + 2x^2 + 2xy + y^2 = (1 + x)^2 + (x + y)^2$

- Hilbert “**非负** = SOS”，1888： $n = 1;\ 2d = 2;\ n = 2, 2d = 4$
- Artin，1927： “非负 = 有理 SOS”
- Blekherman，2006： “非负 $\gg$ SOS”， $n \to \infty$
- Motzkin 多项式： $M(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2$

SOS 分解

- SOS（sum of squares）**分解**： $f = f_1^2 + \cdots + f_t^2 \rightsquigarrow f$ 非负

例： $f = 1 + 2x + 2x^2 + 2xy + y^2 = (1+x)^2 + (x+y)^2$

- Hilbert “**非负** $=$ SOS”，1888： $n = 1$; $2d = 2$; $n = 2, 2d = 4$
- Artin，1927： “非负 $=$ 有理 SOS”
- Blekherman，2006： “非负 $\gg$ SOS”， $n \to \infty$
- Motzkin 多项式： $M(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2$

SOS 分解

- SOS（sum of squares）分解： $f = f_1^2 + \cdots + f_t^2 \rightsquigarrow f$ 非负

例： $f = 1 + 2x + 2x^2 + 2xy + y^2 = (1+x)^2 + (x+y)^2$

- Hilbert “非负 = SOS”，1888： $n = 1;\ 2d = 2;\ n = 2, 2d = 4$
- Artin，1927： “非负 = 有理 SOS”
- Blekherman，2006： “非负 $\gg$ SOS”， $n \to \infty$
- Motzkin 多项式： $M(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2$

SOS 分解

- SOS（sum of squares）**分解**： $f = f_1^2 + \cdots + f_t^2 \rightsquigarrow f$ 非负

例：$f = 1 + 2x + 2x^2 + 2xy + y^2 = (1+x)^2 + (x+y)^2$

- Hilbert“非负 $=$ SOS”，1888： $n = 1$; $2d = 2$; $n = 2, 2d = 4$
- Artin，1927： “非负 $=$ 有理 SOS”
- Blekherman，2006： “非负 $\gg$ SOS”， $n \to \infty$
- Motzkin **多项式**： $M(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2$

Gram 矩阵与半定规划

- f: $2d$, $v_d = [1, x_1, \ldots, x_n, x_1^d, \ldots, x_n^d]$
- f 有 SOS 分解 $\Longleftrightarrow$ 存在半正定矩阵 G 使得 $f = v_d G v_d^T \rightsquigarrow$ SDP
- 称 G 为 f 的一个Gram矩阵
- Gram 矩阵大小: $\binom{n+d}{n}$

Gram 矩阵与半定规划

- f: $2d$, $v_d = [1, x_1, \ldots, x_n, x_1^d, \ldots, x_n^d]$
- f 有 SOS 分解 $\Longleftrightarrow$ 存在半正定矩阵 G 使得 $f = v_d G v_d^T \rightsquigarrow$ SDP
- 称 G 为 f 的一个Gram矩阵
- Gram 矩阵大小：$\binom{n+d}{n}$

Gram 矩阵与半定规划

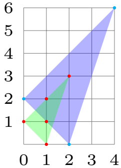
- f: $2d$, $v_d = [1, x_1, \ldots, x_n, x_1^d, \ldots, x_n^d]$
- f 有 SOS 分解 $\iff$ 存在半正定矩阵 G 使得 $f = v_d G v_d^T \rightsquigarrow$ SDP
- 称 G 为 f 的一个Gram矩阵
- Gram 矩阵大小：$\binom{n+d}{n}$

Gram 矩阵与半定规划

- f: $2d$, $v_d = [1, x_1, \ldots, x_n, x_1^d, \ldots, x_n^d]$
- f 有 SOS 分解 $\Longleftrightarrow$ 存在半正定矩阵 G 使得 $f = v_d G v_d^T \rightsquigarrow$ SDP
- 称 G 为 f 的一个Gram矩阵
- Gram 矩阵大小：$\binom{n+d}{n}$

结构化 SOS 分解

- Newton 多面体：$f=\sum f_i^2 \Longrightarrow \mathrm{New}(f_i)\subseteq \frac{1}{2}\mathrm{New}(f)$



$$f=4x_1^4x_2^6+x_1^2-x_1x_2^2+x_2^2$$

- 变量稀疏性

$$f(\mathbf{x})=f_1(\mathbf{x}_1)+f_2(\mathbf{x}_2)\in \mathrm{SOS}\rightsquigarrow f_1(\mathbf{x}_1)\in \mathrm{SOS}, f_2(\mathbf{x}_2)\in \mathrm{SOS}$$

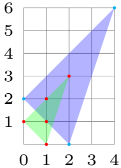
- 项稀疏性

$$\mathbf{x}^{\beta}\cdot \mathbf{x}^{\gamma}\notin \mathrm{supp}(f), \beta+\gamma\notin (2\mathbb{N})^n \rightsquigarrow G_{\beta\gamma}=0$$

- 对称性

结构化 SOS 分解

- Newton 多面体： $f = \sum f_i^2 \implies \mathrm{New}(f_i) \subseteq \frac{1}{2}\mathrm{New}(f)$



$f = 4x_1^4x_2^6 + x_1^2 - x_1x_2^2 + x_2^2$

- 变量稀疏性

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}_1) + f_2(\mathbf{x}_2) \in \mathrm{SOS} \rightsquigarrow f_1(\mathbf{x}_1) \in \mathrm{SOS}, f_2(\mathbf{x}_2) \in \mathrm{SOS}$$

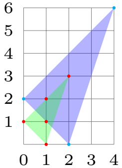
- 项稀疏性

$$\mathbf{x}^{\beta} \cdot \mathbf{x}^{\gamma} \notin \mathrm{supp}(f), \beta + \gamma \notin (2\mathbb{N})^n \rightsquigarrow G_{\beta\gamma} = 0$$

- 对称性

结构化 SOS 分解

- Newton 多面体：$f = \sum f_i^2 \Longrightarrow \mathrm{New}(f_i) \subseteq \frac{1}{2}\mathrm{New}(f)$



$f = 4x_1^4x_2^6 + x_1^2 - x_1x_2^2 + x_2^2$

- 变量稀疏性

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}_1) + f_2(\mathbf{x}_2) \in \mathrm{SOS} \rightsquigarrow f_1(\mathbf{x}_1) \in \mathrm{SOS}, f_2(\mathbf{x}_2) \in \mathrm{SOS}$$

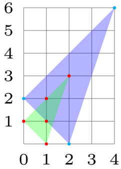
- 项稀疏性

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{x}^{\boldsymbol{\gamma}} \notin \mathrm{supp}(f), \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} \notin (2\mathbb{N})^n \rightsquigarrow G_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}} = 0$$

- 对称性

结构化 SOS 分解

- Newton 多面体：$f=\sum f_i^2 \Longrightarrow \mathrm{New}(f_i)\subseteq \frac{1}{2}\mathrm{New}(f)$



$f=4x_1^4x_2^6+x_1^2-x_1x_2^2+x_2^2$

- 变量稀疏性

$$f(\mathbf{x})=f_1(\mathbf{x}_1)+f_2(\mathbf{x}_2)\in \mathrm{SOS} \rightsquigarrow f_1(\mathbf{x}_1)\in \mathrm{SOS}, f_2(\mathbf{x}_2)\in \mathrm{SOS}$$

- 项稀疏性

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}\cdot \mathbf{x}^{\gamma}\notin \mathrm{supp}(f), \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}\notin (2\mathbb{N})^n \rightsquigarrow G_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}}=0$$

- 对称性

基础半代数集上的正性

- $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1 \geq 0, \ldots, g_m \geq 0\}$

定理 (Putinar's Positivstellensatz，1993)

假设 $\mathcal{Q}(g_1, \ldots, g_m)$ 满足*Archimedean* 条件。若 f 在 S 上是严格正的，则

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \cdots + \sigma_m g_m,$$

其中 $\sigma_0, \ldots, \sigma_m$ 是 *SOS* 多项式。

➤ 其他 Positivstellensatz：Schmüdgen's Positivstellensatz，Krivine-Stengle Positivstellensatz，Reznick's Positivstellensatz，Pólya's Positivstellensatz，Putinar-Vasilescu's Positivstellensatz

基础半代数集上的正性

- $S=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid g_1\geq 0,\ldots,g_m\geq 0\}$

定理 (Putinar's Positivstellensatz，1993)

假设 $\mathcal{Q}(g_1,\ldots,g_m)$ 满足*Archimedean* 条件。若 f 在 S 上是严格正的，则

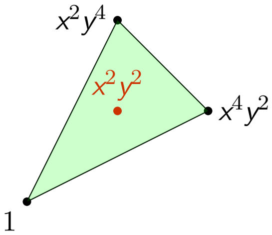
$$f=\sigma_0+\sigma_1 g_1+\cdots+\sigma_m g_m,$$

其中 $\sigma_0,\ldots,\sigma_m$ 是 SOS 多项式。

➤ 其他 Positivstellensatz：Schmüdgen's Positivstellensatz，Krivine-Stengle Positivstellensatz，Reznick's Positivstellensatz，Pólya's Positivstellensatz，Putinar-Vasilescu's Positivstellensatz

SONC 分解

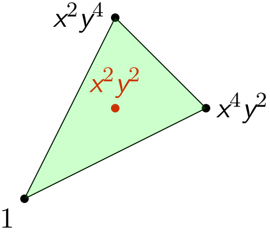
- $M(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2$ （算术-几何平均值不等式 $\Rightarrow$ 非负）



- circuit 多项式：$f = \sum_{\alpha\in\mathscr{A}} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha - d\mathbf{x}^\beta, \alpha \in (2\mathbb{N})^n, c_\alpha > 0, \beta \in \mathrm{conv}(\mathscr{A})^\circ$，$\mathscr{A}$ 是一个单形的顶点集
- SONC 分解：$f = f_1 + \cdots + f_t$，其中 f_i 是非负 circuit 多项式

SONC 分解

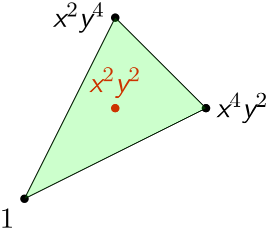
- $M(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2$ （算术-几何平均值不等式 $\Rightarrow$ 非负）



- circuit 多项式： $f = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{A}} c_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} - d\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\alpha} \in (2\mathbb{N})^n, c_{\boldsymbol{\alpha}} > 0, \boldsymbol{\beta} \in \mathrm{conv}(\mathscr{A})^\circ$，$\mathscr{A}$ 是一个单形的顶点集
- SONC 分解： $f = f_1 + \cdots + f_t$，其中 f_i 是非负 circuit 多项式

SONC 分解

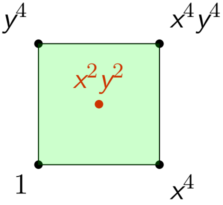
- $M(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2$ （算术-几何平均值不等式 $\Rightarrow$ 非负）



- circuit 多项式： $f = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{A}} c_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} - d\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\alpha} \in (2\mathbb{N})^n, c_{\boldsymbol{\alpha}} > 0, \boldsymbol{\beta} \in \mathrm{conv}(\mathscr{A})^\circ$，$\mathscr{A}$ 是一个单形的顶点集
- SONC 分解： $f = f_1 + \cdots + f_t$，其中 f_i 是非负 circuit 多项式

SAGE 分解

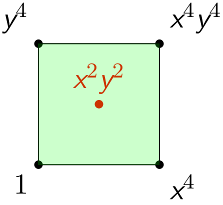
- $f = x^4y^4 + x^4 + y^4 + 1 - 4x^2y^2$ （算术-几何平均值不等式 $\Rightarrow$ 非负）



- AGE 多项式：恰有一个负项的非负多项式 $f = \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha - d\mathbf{x}^\beta$，$\alpha \in (2\mathbb{N})^n$，$c_\alpha > 0$，$\beta \in \mathrm{conv}(\mathscr{A})^\circ$
- SAGE 分解：$f = f_1 + \cdots + f_t$，其中 f_i 是 AGE 多项式

SAGE 分解

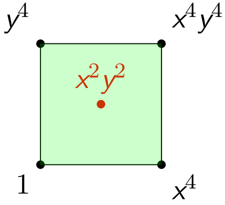
- $f = x^4y^4 + x^4 + y^4 + 1 - 4x^2y^2$ （算术-几何平均值不等式 $\Rightarrow$ 非负）



- AGE 多项式：恰有一个负项的非负多项式 $f = \sum_{\alpha\in\mathscr{A}} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha - d\mathbf{x}^\beta$，$\boldsymbol{\alpha} \in (2\mathbb{N})^n$，$c_\alpha > 0$，$\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{conv}(\mathscr{A})^\circ$
- SAGE 分解：$f = f_1 + \cdots + f_t$，其中 f_i 是 AGE 多项式

SAGE 分解

- $f = x^4y^4 + x^4 + y^4 + 1 - 4x^2y^2$ （算术-几何平均值不等式 $\Rightarrow$ 非负）



- AGE 多项式：恰有一个负项的非负多项式 $f = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{A}} c_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} - d\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}$，

$\boldsymbol{\alpha} \in (2\mathbb{N})^n$，$c_{\boldsymbol{\alpha}} > 0$，$\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{conv}(\mathscr{A})^{\circ}$

- SAGE 分解：$f = f_1 + \cdots + f_t$，其中 f_i 是 AGE 多项式

问题

1. 什么样的非负多项式具有 SONC/SAGE 分解？
2. 二者有何联系？
3. 和 SOS 分解相比，SONC/SAGE 分解有何优势？
4. 如何计算 SONC/SAGE 分解？

问题

1. 什么样的非负多项式具有 SONC/SAGE 分解？
2. 二者有何联系？
3. 和 SOS 分解相比，SONC/SAGE 分解有何优势？
4. 如何计算 SONC/SAGE 分解？

问题

1. 什么样的非负多项式具有 SONC/SAGE 分解？
2. 二者有何联系？
3. 和 SOS 分解相比，SONC/SAGE 分解有何优势？
4. 如何计算 SONC/SAGE 分解？

问题

1. 什么样的非负多项式具有 SONC/SAGE 分解？
2. 二者有何联系？
3. 和 SOS 分解相比，SONC/SAGE 分解有何优势？
4. 如何计算 SONC/SAGE 分解？

SONC 分解的充分条件

定理 (Wang, 2021)

设多项式 f 非负且只有一个负项，即 $f=\sum_{\alpha\in\mathscr{A}} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha - dx^\beta$，$\alpha\in(2\mathbb{N})^n$，$c_\alpha>0$，$\beta\in\mathrm{conv}(\mathscr{A})^\circ$，则 f 存在 *SONC* 分解。

- $f=1+x^4+y^4+x^6y^4+x^4y^6-x^2y$

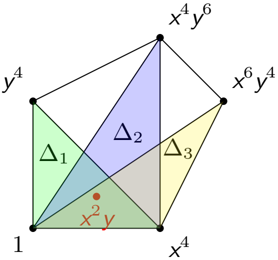
- 推论 “SONC=SAGE”

SONC 分解的充分条件

定理 (Wang, 2021)

设多项式 f 非负且只有一个负项，即 $f=\sum_{\alpha\in\mathscr{A}} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha - d\mathbf{x}^\beta$，$\alpha\in(2\mathbb{N})^n$，$c_\alpha>0$，$\beta\in\operatorname{conv}(\mathscr{A})^\circ$，则 f 存在 *SONC* 分解。

- $f=1+x^4+y^4+x^6y^4+x^4y^6-x^2y$



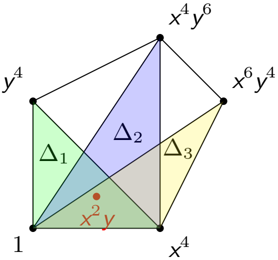
- 推论 "SONC=SAGE"

SONC 分解的充分条件

定理 (Wang, 2021)

设多项式 f 非负且只有一个负项，即 $f=\sum_{\alpha\in\mathscr{A}} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha - d\mathbf{x}^\beta$，$\alpha\in(2\mathbb{N})^n$，$c_\alpha>0$，$\beta\in\operatorname{conv}(\mathscr{A})^\circ$，则 f 存在 *SONC* 分解。

- $f=1+x^4+y^4+x^6y^4+x^4y^6-x^2y$



- **推论** “SONC=SAGE”

SONC 分解的充分条件

定理 (Wang, 2021)

设多项式 f 非负，其牛顿多面体在某个顶点处是简单的且所有负项均位于同一胞腔。则 f 存在 *SONC* 分解。

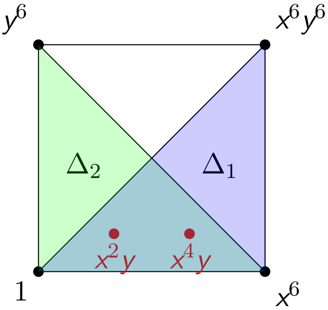
- $f = 1 + x^6 + y^6 + x^6y^6 - x^2y - x^4y$

SONC 分解的充分条件

定理 (Wang, 2021)

设多项式 f 非负，其牛顿多面体在某个顶点处是简单的且所有负项均位于同一胞腔。则 f 存在 *SONC* 分解。

- $f = 1 + x^6 + y^6 + x^6y^6 - x^2y - x^4y$



SONC 分解保持项稀疏性

- $f = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{A}} c_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} - \sum_{\boldsymbol{\beta}\in\mathscr{B}} d_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}$，$\boldsymbol{\alpha} \in (2\mathbb{N})^n$，$c_{\boldsymbol{\alpha}} > 0$，$\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{conv}(\mathscr{A})^\circ$，$d_{\boldsymbol{\beta}} > 0$
- $\mathscr{F}(\beta) := \{\Delta \mid \Delta$ 是单形$, \beta \in \Delta^\circ, V(\Delta) \subseteq \mathscr{B}\}$

定理 (Wang, 2021)

若 f 是 SONC 多项式，则 f 存在如下 SONC 分解：

$$f = \sum_{\beta\in\mathscr{B}} \sum_{\Delta\in\mathscr{F}(\beta)} f_{\beta\Delta} + \sum_{\alpha\in\mathscr{I}} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha,$$

其中 $f_{\beta\Delta}$ 是支撑在 $V(\Delta) \cup \{\beta\}$ 上的非负 circuit 多项式，

$\mathscr{I} = \{\alpha \in \mathscr{A} \mid \alpha \notin \cup_{\beta\in\mathscr{B}} \cup_{\Delta\in\mathscr{F}(\beta)} V(\Delta)\}$。

SONC 分解保持项稀疏性

- $f = \sum_{\alpha\in\mathscr{A}} c_\alpha \mathbf{x}^{\alpha} - \sum_{\beta\in\mathscr{B}} d_\beta \mathbf{x}^{\beta}$，$\alpha \in (2\mathbb{N})^n$，$c_\alpha > 0$，$\beta \in \mathrm{conv}(\mathscr{A})^\circ$，$d_\beta > 0$
- $\mathscr{F}(\beta) := \{\Delta \mid \Delta$ 是单形, $\beta \in \Delta^\circ, V(\Delta) \subseteq \mathscr{B}\}$

定理 (Wang, 2021)

若 f 是 SONC 多项式，则 f 存在如下 SONC 分解：

$$f = \sum_{\beta\in\mathscr{B}} \sum_{\Delta\in\mathscr{F}(\beta)} f_{\beta\Delta} + \sum_{\alpha\in\mathscr{I}} c_\alpha \mathbf{x}^{\alpha},$$

其中 $f_{\beta\Delta}$ 是支撑在 $V(\Delta)\cup\{\beta\}$ 上的非负 circuit 多项式，$\mathscr{I} = \{\alpha \in \mathscr{A} \mid \alpha \notin \cup_{\beta\in\mathscr{B}} \cup_{\Delta\in\mathscr{F}(\beta)} V(\Delta)\}$。

SONC 分解保持项稀疏性

- $f = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{A}} c_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} - \sum_{\boldsymbol{\beta}\in\mathscr{B}} d_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}$，$\boldsymbol{\alpha} \in (2\mathbb{N})^n$，$c_{\boldsymbol{\alpha}} > 0$，$\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{conv}(\mathscr{A})^\circ$，$d_{\boldsymbol{\beta}} > 0$
- $\mathscr{F}(\boldsymbol{\beta}) := \{\Delta \mid \Delta$ 是单形, $\boldsymbol{\beta} \in \Delta^\circ, V(\Delta) \subseteq \mathscr{B}\}$

定理 (Wang, 2021)

若 f 是 *SONC* 多项式，则 f 存在如下 *SONC* 分解：

$$f = \sum_{\boldsymbol{\beta}\in\mathscr{B}} \sum_{\Delta\in\mathscr{F}(\boldsymbol{\beta})} f_{\boldsymbol{\beta}\Delta} + \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{I}} c_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}},$$

其中 $f_{\boldsymbol{\beta}\Delta}$ 是支撑在 $V(\Delta) \cup \{\boldsymbol{\beta}\}$ 上的非负 *circuit* 多项式，$\mathscr{I} = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{A} \mid \boldsymbol{\alpha} \notin \bigcup_{\boldsymbol{\beta}\in\mathscr{B}} \bigcup_{\Delta\in\mathscr{F}(\boldsymbol{\beta})} V(\Delta)\}$。

SONC 锥的二阶锥表示

- **二阶锥**：$\mathbb{S}^2_+ := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \succeq 0\}$
- **SONC 锥**： 给定 $\mathscr{A}, \mathscr{B}_1 \subseteq (2\mathbb{N})^n$ 和 $\mathscr{B}_2 \subseteq \mathbb{N}^n \backslash (2\mathbb{N})^n$,

$$\mathrm{SONC}_{\mathscr{A},\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} := \{(\mathbf{c}_{\mathscr{A}}, \mathbf{d}_{\mathscr{B}_1}, \mathbf{d}_{\mathscr{B}_2}) \in \mathbb{R}_+^{|\mathscr{A}|} \times \mathbb{R}_+^{|\mathscr{B}_1|} \times \mathbb{R}^{|\mathscr{B}_2|} \mid \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha - \sum_{\beta \in \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2} d_\beta \mathbf{x}^\beta \in \mathrm{SONC}\}$$

定理 (Wang 和 Magron, 2020)

任意 *SONC* 锥存在$(\mathbb{S}^2_+)^k$-提升，对某个 $k \in \mathbb{N}$。

SONC 锥的二阶锥表示

- **二阶锥**：$\mathbb{S}_+^2 := \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \succeq 0\}$
- **SONC 锥**： 给定 $\mathscr{A}, \mathscr{B}_1 \subseteq (2\mathbb{N})^n$ 和 $\mathscr{B}_2 \subseteq \mathbb{N}^n \backslash (2\mathbb{N})^n$，

$$\mathrm{SONC}_{\mathscr{A},\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} := \{(\mathbf{c}_{\mathscr{A}}, \mathbf{d}_{\mathscr{B}_1}, \mathbf{d}_{\mathscr{B}_2}) \in \mathbb{R}_+^{|\mathscr{A}|} \times \mathbb{R}_+^{|\mathscr{B}_1|} \times \mathbb{R}^{|\mathscr{B}_2|} \mid \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{A}} c_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} - \sum_{\boldsymbol{\beta} \in \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2} d_{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}} \in \mathrm{SONC}\}$$

定理 (Wang 和 Magron, 2020)

任意 *SONC* 锥存在$(\mathbb{S}_+^2)^k$-提升，对某个 $k \in \mathbb{N}$。

SONC 锥的二阶锥表示

- 二阶锥: $\mathbb{S}_+^2 := \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \succeq 0\}$
- SONC 锥: 给定 $\mathscr{A}, \mathscr{B}_1 \subseteq (2\mathbb{N})^n$ 和 $\mathscr{B}_2 \subseteq \mathbb{N}^n \backslash (2\mathbb{N})^n$,

$$\begin{aligned}\mathrm{SONC}_{\mathscr{A},\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} :=& \{(\mathbf{c}_{\mathscr{A}}, \mathbf{d}_{\mathscr{B}_1}, \mathbf{d}_{\mathscr{B}_2}) \in \mathbb{R}_+^{|\mathscr{A}|} \times \mathbb{R}_+^{|\mathscr{B}_1|} \times \mathbb{R}^{|\mathscr{B}_2|} \\ & \mid \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{A}} c_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} - \sum_{\boldsymbol{\beta} \in \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2} d_{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}} \in \mathrm{SONC}\}\end{aligned}$$

定理 (Wang 和 Magron, 2020)

任意 *SONC* 锥存在$(\mathbb{S}_+^2)^k$-提升，对某个 $k \in \mathbb{N}$。

多项式优化

- 多项式优化问题：

$$
f^* := \begin{cases} \inf & f \\ \text{s.t.} & g_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m \\ & (h_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m') \end{cases}
$$

- 非凸，NP-难
- 最优电力流，计算机视觉，组合优化，神经网络，量子信息……

多项式优化

- 多项式优化问题:

$$f^* := \begin{cases} \inf & f \\ \text{s.t.} & g_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m \\ & (h_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m') \end{cases}$$

- 非凸, NP-难
- 最优电力流，计算机视觉，组合优化，神经网络，量子信息……

多项式优化

- 多项式优化问题:

$$f^* := \begin{cases} \inf & f \\ \text{s.t.} & g_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m \\ & (h_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m') \end{cases}$$

- 非凸, NP-难
- 最优电力流，计算机视觉，组合优化，神经网络，量子信息……

求解多项式优化问题

- 计算全局最优值
- 验证全局最优性
- 提取全局最优解
- 给出全局最优值的上界/下界

➤ 工具：Moment-SOS hierarchy （亦称Lasserre's hierarchy）

求解多项式优化问题

- 计算全局最优值
- 验证全局最优性
- 提取全局最优解
- 给出全局最优值的上界/下界

➤ 工具：Moment-SOS hierarchy （亦称Lasserre's hierarchy）

求解多项式优化问题

- 计算全局最优值
- 验证全局最优性
- 提取全局最优解
- 给出全局最优值的上界/下界

➤ 工具：Moment-SOS hierarchy （亦称Lasserre's hierarchy）

求解多项式优化问题

- 计算全局最优值
- 验证全局最优性
- 提取全局最优解
- 给出全局最优值的上界/下界

➤ 工具：Moment-SOS hierarchy （亦称Lasserre's hierarchy）

求解多项式优化问题

- 计算全局最优值
- 验证全局最优性
- 提取全局最优解
- 给出全局最优值的上界/下界

➤ 工具：Moment-SOS hierarchy （亦称Lasserre's hierarchy）

测度与优化

- $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1 \geq 0, \ldots, g_m \geq 0\}$，$y_\alpha = \int_S \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \, \mathrm{d}\mu \rightsquigarrow$ moment
- 原多项式优化问题等价于

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}(S)_+} \left\{ \int_S f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mu : \mu(S) = 1 \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\inf_{\mathbf{y}} \left\{ L_{\mathbf{y}}(f) = \sum_{\alpha \in \mathrm{supp}(f)} f_\alpha y_\alpha : \exists \mu \in \mathcal{M}(S)_+ \text{ s.t. } \mathbf{y} \sim \mu \text{ 和} y_{\mathbf{0}} = 1 \right\}$$

- 问题：什么样的序列 $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ 允许 S 上的有限 Borel 测度表示？

测度与优化

- $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1 \geq 0, \ldots, g_m \geq 0\}$，$y_\alpha = \int_S \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \, \mathrm{d}\mu \rightsquigarrow$ moment
- 原多项式优化问题等价于

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}(S)_+} \left\{ \int_S f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mu : \mu(S) = 1 \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\inf_{\mathbf{y}} \left\{ L_{\mathbf{y}}(f) = \sum_{\alpha \in \mathrm{supp}(f)} f_\alpha y_\alpha : \exists \mu \in \mathcal{M}(S)_+ \text{ s.t. } \mathbf{y} \sim \mu \text{ 和} y_{\mathbf{0}} = 1 \right\}$$

- 问题：什么样的序列 $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ 允许 S 上的有限 Borel 测度表示？

测度与优化

- $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1 \geq 0, \ldots, g_m \geq 0\}$，$y_{\boldsymbol{\alpha}} = \int_S \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \, \mathrm{d}\mu \rightsquigarrow$ moment
- 原多项式优化问题等价于

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}(S)_+} \left\{ \int_S f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mu : \mu(S) = 1 \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\inf_{\mathbf{y}} \left\{ L_{\mathbf{y}}(f) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{supp}(f)} f_{\boldsymbol{\alpha}} y_{\boldsymbol{\alpha}} : \exists \mu \in \mathcal{M}(S)_+ \text{ s.t. } \mathbf{y} \sim \mu \text{ 和} y_{\mathbf{0}} = 1 \right\}$$

- 问题：什么样的序列 $\mathbf{y} = (y_{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n}$ 允许 S 上的有限 Borel 测度表示？

Moment 矩阵和局部化矩阵

- $\mathbb{N}_r^n := \{\boldsymbol{\beta} = (\beta_i) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{i=1}^n \beta_i \leq r\}$
- r 阶moment 矩阵 $M_r(\mathbf{y})$：

$$[M_r(\mathbf{y})]_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}} := y_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}}, \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}_r^n$$

- 给定 $g = \sum_\alpha g_\alpha \mathbf{x}^\alpha$，$r$ 阶局部化矩阵 $M_r(g\mathbf{y})$：

$$[M_r(g\mathbf{y})]_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}} := \sum_\alpha g_\alpha y_{\alpha+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}}, \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}_r^n$$

- $\mathbf{x} = x$，$g = 1 - x^2$：

$$M_2(\mathbf{y}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} & \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} \end{array}, \quad M_1(g\mathbf{y}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & x \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ x \end{array} & \begin{pmatrix} y_0 - y_2 & y_1 - y_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Moment 矩阵和局部化矩阵

- $\mathbb{N}_r^n := \{\boldsymbol{\beta} = (\beta_i) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{i=1}^n \beta_i \le r\}$
- r 阶moment 矩阵 $M_r(\mathbf{y})$：

$$[M_r(\mathbf{y})]_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}} := y_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}}, \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}_r^n$$

- 给定 $g = \sum_\alpha g_\alpha \mathbf{x}^\alpha$，$r$ 阶局部化矩阵 $M_r(g\mathbf{y})$：

$$[M_r(g\mathbf{y})]_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}} := \sum_\alpha g_\alpha y_{\alpha+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}}, \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}_r^n$$

- $\mathbf{x} = x$，$g = 1 - x^2$：

$$M_2(\mathbf{y}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} \end{array}, \quad M_1(g\mathbf{y}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ x \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} y_0 - y_2 & y_1 - y_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Moment 矩阵和局部化矩阵

- $\mathbb{N}_r^n := \{\boldsymbol{\beta} = (\beta_i) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{i=1}^n \beta_i \leq r\}$
- r 阶moment 矩阵 $M_r(\mathbf{y})$：

$$[M_r(\mathbf{y})]_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}} := y_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}}, \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}_r^n$$

- 给定 $g = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} g_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$， r 阶局部化矩阵 $M_r(g\mathbf{y})$：

$$[M_r(g\mathbf{y})]_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}} := \sum_{\boldsymbol{\alpha}} g_{\boldsymbol{\alpha}} y_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}}, \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}_r^n$$

- $\mathbf{x} = x$， $g = 1 - x^2$：

$$M_2(\mathbf{y}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} \end{array}, \quad M_1(g\mathbf{y}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ x \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} y_0 - y_2 & y_1 - y_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Moment 矩阵和局部化矩阵

- $\mathbb{N}_r^n := \{\boldsymbol{\beta} = (\beta_i) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{i=1}^n \beta_i \le r\}$
- r 阶moment 矩阵 $M_r(\mathbf{y})$:

$$[M_r(\mathbf{y})]_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}} := y_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}}, \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}_r^n$$

- 给定 $g = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} g_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$， r 阶局部化矩阵 $M_r(g\mathbf{y})$:

$$[M_r(g\mathbf{y})]_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}} := \sum_{\boldsymbol{\alpha}} g_{\boldsymbol{\alpha}} y_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}}, \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}_r^n$$

- $\mathbf{x} = x, \;\; g = 1 - x^2$:

$$M_2(\mathbf{y}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} & \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} \end{array}, \quad M_1(g\mathbf{y}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & x \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ x \end{array} & \begin{pmatrix} y_0 - y_2 & y_1 - y_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Moment 松弛

- $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1 \geq 0, \ldots, g_m \geq 0\}$

定理

假设 $\mathcal{Q}(g_1, \ldots, g_m)$ 满足Archimedean 条件。序列 $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ 允许 S 上的有限 *Borel* 测度表示当且仅当对所有 j 和 r，$M_r(\mathbf{y}) \succeq 0$ 和 $M_{r-d_j}(g_j\mathbf{y}) \succeq 0$。

- Moment 松弛：

$$\theta_r := \begin{cases} \inf & L_{\mathbf{y}}(f) \\ \text{s.t.} & M_r(\mathbf{y}) \succeq 0, \\ & M_{r-d_j}(g_j\mathbf{y}) \succeq 0, \quad j = 1, \ldots, m, \\ & y_0 = 1. \end{cases}$$

Moment 松弛

- $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1 \geq 0, \dots, g_m \geq 0\}$

定理

假设 $Q(g_1, \dots, g_m)$ 满足*Archimedean* 条件。序列 $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ 允许 S 上的有限 *Borel* 测度表示当且仅当对所有 j 和 r，$M_r(\mathbf{y}) \succeq 0$ 和 $M_{r-d_j}(g_j\mathbf{y}) \succeq 0$。

- Moment 松弛：

$$\theta_r := \begin{cases} \inf & L_{\mathbf{y}}(f) \\ \text{s.t.} & M_r(\mathbf{y}) \succeq 0, \\ & M_{r-d_j}(g_j\mathbf{y}) \succeq 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ & y_{\mathbf{0}} = 1. \end{cases}$$

非负多项式锥

- 原多项式优化问题的对偶：

$$f^* = \sup_{\lambda}\{\lambda : f(\mathbf{x}) - \lambda \geq 0, \forall \mathbf{x} \in S\}$$

- $P_S(\mathbf{x}) := \{g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}] \mid g(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ over } S\} \rightsquigarrow$ intractable
- 问题：How to approximate $P_S(\mathbf{x})$ by more tractable subsets?

$\rightsquigarrow$ SOS，SONC/SAGE，hyperbolic 多项式

非负多项式锥

- **原多项式优化问题的对偶**：

$$f^* = \sup_{\lambda}\{\lambda : f(\mathbf{x}) - \lambda \geq 0, \forall \mathbf{x} \in S\}$$

- $P_S(\mathbf{x}) := \{g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}] \mid g(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ over } S\}$ $\rightsquigarrow$ intractable
- 问题：How to approximate $P_S(\mathbf{x})$ by more tractable subsets?

  $\rightsquigarrow$ SOS，SONC/SAGE，hyperbolic 多项式

非负多项式锥

- **原多项式优化问题的对偶**：

$$f^* = \sup_{\lambda}\{\lambda : f(\mathbf{x}) - \lambda \geq 0, \forall \mathbf{x} \in S\}$$

- $P_S(\mathbf{x}) := \{g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}] \mid g(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ over } S\}$ $\rightsquigarrow$ intractable
- **问题**： How to approximate $P_S(\mathbf{x})$ by more tractable subsets?

$\rightsquigarrow$ SOS，SONC/SAGE，hyperbolic **多项式**

二次模

- $\Sigma(\mathbf{x}) := \{f \in \mathbb{R}[\mathbf{x}] \mid f = \sum_i f_i^2, f_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]\}$
- 二次模： 给定 $\mathbf{g} = \{g_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{R}[\mathbf{x}]$,

$$\mathcal{Q}(\mathbf{g}) := \left\{ \sigma_0 + \sum_{j=1}^m \sigma_j g_j \mid \sigma_j \in \Sigma(\mathbf{x}), j = 0, 1, \ldots, m \right\} \subseteq P_S(\mathbf{x})$$

- 截断二次模：

$$\mathcal{Q}(\mathbf{g})_{2r} := \left\{ \sigma_0 + \sum_{j=1}^m \sigma_j g_j \mid \sigma_j \in \Sigma(\mathbf{x}), \deg(\sigma_j g_j) \leq 2r, j = 0, 1, \ldots, m \right\}$$

二次模

- $\Sigma(\mathbf{x}) := \{f \in \mathbb{R}[\mathbf{x}] \mid f = \sum_i f_i^2, f_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]\}$
- 二次模： 给定 $\mathbf{g} = \{g_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{R}[\mathbf{x}]$,

$$\mathcal{Q}(\mathbf{g}) := \left\{ \sigma_0 + \sum_{j=1}^{m} \sigma_j g_j \mid \sigma_j \in \Sigma(\mathbf{x}), j = 0, 1, \ldots, m \right\} \subseteq P_S(\mathbf{x})$$

- 截断二次模：

$$\mathcal{Q}(\mathbf{g})_{2r} := \left\{ \sigma_0 + \sum_{j=1}^{m} \sigma_j g_j \mid \sigma_j \in \Sigma(\mathbf{x}), \deg(\sigma_j g_j) \leq 2r, j = 0, 1, \ldots, m \right\}$$

二次模

- $\Sigma(\mathbf{x}) := \{f \in \mathbb{R}[\mathbf{x}] \mid f = \sum_i f_i^2, f_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]\}$
- **二次模**: **给定** $\mathbf{g} = \{g_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{R}[\mathbf{x}]$,

$$\mathcal{Q}(\mathbf{g}) := \left\{ \sigma_0 + \sum_{j=1}^{m} \sigma_j g_j \mid \sigma_j \in \Sigma(\mathbf{x}), j = 0, 1, \ldots, m \right\} \subseteq P_S(\mathbf{x})$$

- **截断二次模**:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{g})_{2r} := \left\{ \sigma_0 + \sum_{j=1}^{m} \sigma_j g_j \mid \sigma_j \in \Sigma(\mathbf{x}), \deg(\sigma_j g_j) \leq 2r, j = 0, 1, \ldots, m \right\}$$

对偶 SOS 松弛

- 对偶 SOS 松弛:

$$\theta_r^* := \begin{cases} \sup & \lambda \\ \text{s.t.} & f - \lambda \in \mathcal{Q}(\mathbf{g})_{2r}. \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\theta_r^* := \begin{cases} \sup & \lambda \\ \text{s.t.} & f - \lambda = \sigma_0 + \sum_{j=1}^m \sigma_j g_j, \\ & \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m \in \Sigma(\mathbf{x}), \\ & \deg(\sigma_0) \leq 2r, \deg(\sigma_j g_j) \leq 2r, j = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Moment-SOS hierarchy

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & f^* & & & \\
 & \geq & & & & \geq & \\
 & \vdots & & & & \vdots & \\
 & \geq & & & & \geq & \\
\text{(moment 松弛)} & \theta_r & & \text{``}=\text{''} & & \theta_r^* & \text{(SOS 松弛)} \\
 & \geq & & & & \geq & \\
 & \vdots & & & & \vdots & \\
 & \geq & & & & \geq & \\
 & \theta_{\underline{r}} & & \text{``}=\text{''} & & \theta_{\underline{r}}^* &
\end{array}
$$

渐进收敛性与有限收敛性

- 假定 Archimedean 条件：存在 $N > 0$ 使得 $N - ||\mathbf{x}||^2 \in \mathcal{Q}(\mathbf{g})$
  - $\theta_r \uparrow f^*$ 和 $\theta_r^* \uparrow f^*$ 当 $r \to \infty$（Lassere, 2001）
  - 一般地有限收敛性成立（Nie, 2014）
  - 由 moment 矩阵的秩可以验证全局最优性
  - 当秩条件满足时，可以提取全局最优解

渐进收敛性与有限收敛性

- 假定 Archimedean 条件：存在 $N > 0$ 使得 $N - ||\mathbf{x}||^2 \in \mathcal{Q}(\mathbf{g})$
  - $\theta_r \uparrow f^*$ 和 $\theta_r^* \uparrow f^*$ 当 $r \to \infty$（Lassere, 2001）
  - 一般地有限收敛性成立（Nie, 2014）
  - 由 moment 矩阵的秩可以验证全局最优性
  - 当秩条件满足时，可以提取全局最优解

渐进收敛性与有限收敛性

- 假定 Archimedean 条件：存在 $N > 0$ 使得 $N - ||\mathbf{x}||^2 \in \mathcal{Q}(\mathbf{g})$
  - $\theta_r \uparrow f^*$ 和 $\theta_r^* \uparrow f^*$ 当 $r \to \infty$（Lassere, 2001）
  - 一般地**有限收敛性**成立（Nie, 2014）
  - 由 moment 矩阵的秩可以验证全局最优性
  - 当秩条件满足时，可以提取全局最优解

渐进收敛性与有限收敛性

- 假定 Archimedean 条件：存在 $N > 0$ 使得 $N - ||\mathbf{x}||^2 \in \mathcal{Q}(\mathbf{g})$
  - $\theta_r \uparrow f^*$ 和 $\theta_r^* \uparrow f^*$ 当 $r \to \infty$（Lassere, 2001）
  - 一般地有限收敛性成立（Nie, 2014）
  - 由 moment 矩阵的秩可以验证全局最优性
  - 当秩条件满足时，可以提取全局最优解

渐进收敛性与有限收敛性

- 假定 Archimedean 条件：存在 $N > 0$ 使得 $N - ||\mathbf{x}||^2 \in \mathcal{Q}(\mathbf{g})$
  - ➤ $\theta_r \uparrow f^*$ 和 $\theta_r^* \uparrow f^*$ 当 $r \to \infty$（Lassere, 2001）
  - ➤ 一般地有限收敛性成立（Nie, 2014）
  - ➤ 由 moment 矩阵的秩可以验证全局最优性
  - ➤ 当秩条件满足时，可以提取全局最优解

Scalability issue

- r 阶松弛对应 SDP 问题的规模:
  1. PSD 矩阵大小: $\binom{n+r}{r}$
  2. 等式约束个数: $\binom{n+2r}{2r}$
- $r = 2$, $n \leq 30$ (Mosek)
- 利用结构:
  - 商环
  - 对称性
  - 稀疏性

Scalability issue

- r 阶松弛对应 SDP 问题的规模：
  1. PSD 矩阵大小：$\binom{n+r}{r}$
  2. 等式约束个数：$\binom{n+2r}{2r}$
- $r=2$，$n \leq 30$（Mosek）
- 利用结构：
  - 商环
  - 对称性
  - 稀疏性

Scalability issue

- r 阶松弛对应 SDP 问题的规模:
  1. PSD 矩阵大小: $\binom{n+r}{r}$
  2. 等式约束个数: $\binom{n+2r}{2r}$
- $r=2$, $n \leq 30$ (Mosek)
- 利用结构:
  - 商环
  - 对称性
  - 稀疏性

变量（correlative）稀疏性（Waki 等，2006）

- 变量稀疏型（csp）图 $G^{\mathrm{csp}}(V,E)$：
  - $V := \{x_1,\ldots,x_n\}$
  - $\{x_i,x_j\}\in E \Longleftrightarrow x_i,x_j$ 出现在 f 的同一项或同一个约束多项式 g_k 中
- 对 $G^{\mathrm{csp}}(V,E)$ 的每一个极大团，

$$I_k \longmapsto M_r(\mathbf{y},I_k), M_{r-d_j}(g_j\mathbf{y},I_k)$$

变量（correlative）稀疏性（Waki 等，2006）

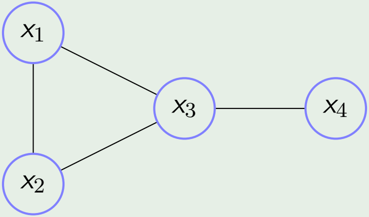
- 变量稀疏型（csp）图 $G^{\mathrm{csp}}(V, E)$：
  - $V := \{x_1, \ldots, x_n\}$
  - $\{x_i, x_j\} \in E \Longleftrightarrow x_i, x_j$ 出现在 f 的同一项或同一个约束多项式 g_k 中
- 对 $G^{\mathrm{csp}}(V, E)$ 的每一个极大团，

$$I_k \longmapsto M_r(\mathbf{y}, I_k), M_{r-d_j}(g_j\mathbf{y}, I_k)$$

变量稀疏性

例

$f = x_1^4 + x_1x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2x_4^2, \;\; g_1 = 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \; g_2 = 1 - x_3x_4$



两个极大团：$\{x_1, x_2, x_3\}$ 和 $\{x_3, x_4\}$

与变量稀疏性相适应的 moment-SOS hierarchy

- 如果 csp 图是弦图，该 hierarchy 和标准 hierarchy 具有相同的收敛性
- 仍然可以由 moment 矩阵的秩验证全局最优性
- 当秩条件满足时，可以提取全局最优解
- 当团数比较小时（≤ 10），显著提高计算规模

与变量稀疏性相适应的 moment-SOS hierarchy

- 如果 csp 图是弦图，该 hierarchy 和标准 hierarchy 具有相同的收敛性
- 仍然可以由 moment 矩阵的秩验证全局最优性
- 当秩条件满足时，可以提取全局最优解
- 当团数比较小时（≤ 10），显著提高计算规模

与变量稀疏性相适应的 moment-SOS hierarchy

- 如果 csp 图是弦图，该 hierarchy 和标准 hierarchy 具有相同的收敛性
- 仍然可以由 moment 矩阵的秩验证全局最优性
- 当秩条件满足时，可以提取全局最优解
- 当团数比较小时（≤ 10），显著提高计算规模

与变量稀疏性相适应的 moment-SOS hierarchy

- 如果 csp 图是弦图，该 hierarchy 和标准 hierarchy 具有相同的收敛性
- 仍然可以由 moment 矩阵的秩验证全局最优性
- 当秩条件满足时，可以提取全局最优解
- 当团数比较小时（≤ 10），显著提高计算规模

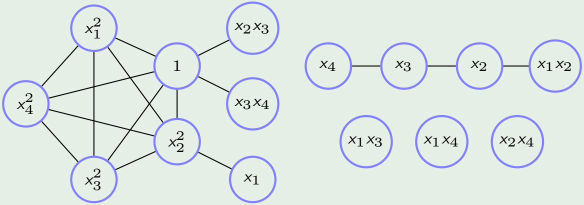
项稀疏性（Wang, Magron 和 Lasserre，2021）

- 项稀疏型（tsp）图 $G^{\text{tsp}}(V, E)$：
  - $V := v_r = \{1, x_1, \ldots, x_n, x_1^r, \ldots, x_n^r\}$
  - $\{\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}\} \in E \Longleftrightarrow \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}} \in \operatorname{supp}(f) \cup \bigcup_{j=1}^{m} \operatorname{supp}(g_j) \cup v_r^2$

项稀疏性

例

$f = x_1^4 + x_1x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2x_4^2$， $g_1 = 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$， $g_2 = 1 - x_3x_4$



项稀疏性

- 假设 $(G^{\mathrm{tsp}})'$ 是 G^{tsp} 的弦扩张，极大团： $C_1, \ldots, C_t$

$$C_i \longmapsto M_{C_i}(\mathbf{y}), \quad i = 1, \ldots, t$$

- 分解 moment 矩阵：

$$M_r(\mathbf{y}) \succeq 0 \longrightarrow M_{C_i}(\mathbf{y}) \succeq 0, \quad i = 1, \ldots, t$$

- 分解局部化矩阵 $M_{r-d_j}(\mathbf{y})$， $j = 1, \ldots, m$

项稀疏性

- 假设 $(G^{\text{tsp}})'$ 是 G^{tsp} 的弦扩张，极大团：$C_1, \ldots, C_t$

$$C_i \longmapsto M_{C_i}(\mathbf{y}), \quad i = 1, \ldots, t$$

- 分解 moment 矩阵：

$$M_r(\mathbf{y}) \succeq 0 \longrightarrow M_{C_i}(\mathbf{y}) \succeq 0, \quad i = 1, \ldots, t$$

- 分解局部化矩阵 $M_{r-d_j}(\mathbf{y})$，$j = 1, \ldots, m$

项稀疏性

- 假设 $(G^{\mathrm{tsp}})'$ 是 G^{tsp} 的弦扩张，极大团：$C_1, \ldots, C_t$

$$C_i \longmapsto M_{C_i}(\mathbf{y}), \quad i = 1, \ldots, t$$

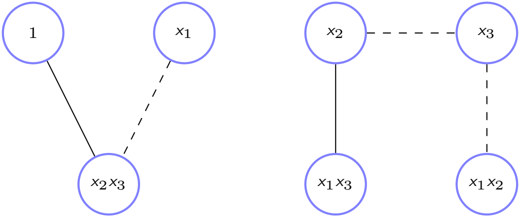
- 分解 moment 矩阵：

$$M_r(\mathbf{y}) \succeq 0 \longrightarrow M_{C_i}(\mathbf{y}) \succeq 0, \quad i = 1, \ldots, t$$

- 分解局部化矩阵 $M_{r-d_j}(\mathbf{y})$，$j = 1, \ldots, m$

迭代程序

- 支撑扩张：$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}'}\mathbf{x}^{\gamma'} = \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{x}^{\gamma}$，$\{\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{x}^{\gamma}\} \in E \Rightarrow \{\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}'}, \mathbf{x}^{\gamma'}\} \in E$

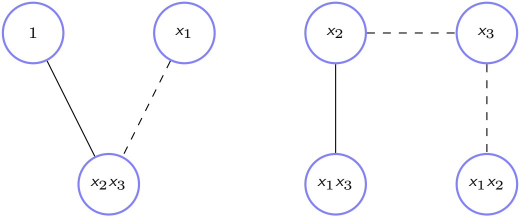


- 迭代地执行支撑扩张和弦扩张：

$$G^{(1)} := (G^{\mathrm{tsp}})' \subseteq \cdots \subseteq G^{(s)} \subseteq G^{(s+1)} \subseteq \cdots$$

迭代程序

- 支撑扩张：$\mathbf{x}^{\beta'}\mathbf{x}^{\gamma'}=\mathbf{x}^{\beta}\mathbf{x}^{\gamma}$，$\{\mathbf{x}^{\beta},\mathbf{x}^{\gamma}\}\in E\Rightarrow\{\mathbf{x}^{\beta'},\mathbf{x}^{\gamma'}\}\in E$



- 迭代地执行支撑扩张和弦扩张：

$$G^{(1)}:=(G^{\mathrm{tsp}})'\subseteq\cdots\subseteq G^{(s)}\subseteq G^{(s+1)}\subseteq\cdots$$

与项稀疏性相适应的 moment-SOS hierarchy

- 给定 s，$G_j^{(s)}$ 的极大团：$C_{j,1}^{(s)},\dots,C_{j,t_{j,s}}^{(s)}$
- TSSOS hierarchy：

$$\theta_r^{(s)} := \begin{cases} \inf & L_{\mathbf{y}}(f) \\ \text{s.t.} & M_{C_{0,i}^{(s)}}(\mathbf{y}) \succeq 0, \quad i=1,\dots,t_{0,s}, \\ & M_{C_{j,i}^{(s)}}(g_j\mathbf{y}) \succeq 0, \quad i=1,\dots,t_{j,s},\ j=1,\dots,m, \\ & y_0 = 1. \end{cases}$$

与项稀疏性相适应的 moment-SOS hierarchy

- 给定 s，$G_j^{(s)}$ 的极大团：$C_{j,1}^{(s)}, \ldots, C_{j,t_{j,s}}^{(s)}$
- TSSOS hierarchy：

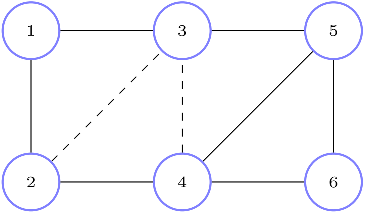
$$\theta_r^{(s)} := \begin{cases} \inf & L_{\mathbf{y}}(f) \\ \text{s.t.} & M_{C_{0,i}^{(s)}}(\mathbf{y}) \succeq 0, \quad i = 1, \ldots, t_{0,s}, \\ & M_{C_{j,i}^{(s)}}(g_j \mathbf{y}) \succeq 0, \quad i = 1, \ldots, t_{j,s}, \ j = 1, \ldots, m, \\ & y_{\mathbf{0}} = 1. \end{cases}$$

A two-level hierarchy of lower bounds

$$
\begin{array}{ccccccc}
\theta_{\underline{r}}^{(1)} & \leq & \theta_{\underline{r}}^{(2)} & \leq & \cdots & \leq & \theta_{\underline{r}} \\
\rotatebox{-90}{$\leq$} & & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & & & \rotatebox{-90}{$\leq$} \\
\theta_{\underline{r}+1}^{(1)} & \leq & \theta_{\underline{r}+1}^{(2)} & \leq & \cdots & \leq & \theta_{\underline{r}+1} \\
\rotatebox{-90}{$\leq$} & & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & & & \rotatebox{-90}{$\leq$} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\rotatebox{-90}{$\leq$} & & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & & & \rotatebox{-90}{$\leq$} \\
\theta_{r}^{(1)} & \leq & \theta_{r}^{(2)} & \leq & \cdots & \leq & \theta_{r} \\
\rotatebox{-90}{$\leq$} & & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & & & \rotatebox{-90}{$\leq$} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

弦扩张的不同选取

- 弦扩张：
  - 最大弦扩张
  - （近似）最小弦扩张



TSSOS hierarchy

- TSSOS hierarchy：
  - 对 QCQP，有 $\theta_1^{(1)} = \theta_{\text{shor}}$
  - 固定 s，$(\theta_r^{(s)})_{r\geq \underline{r}}$ 单调非减
  - 固定 r，$(\theta_r^{(s)})_{s\geq 1}$ 单调非减
  - 如果使用最大弦扩张，则 $(\theta_r^{(s)})_{s\geq 1}$ 有限步收敛到 θ_r

TSSOS hierarchy

- TSSOS hierarchy：
  - 对 QCQP，有 $\theta_1^{(1)} = \theta_{\mathrm{shor}}$
  - 固定 s，$(\theta_r^{(s)})_{r \geq \underline{r}}$ 单调非减
  - 固定 r，$(\theta_r^{(s)})_{s \geq 1}$ 单调非减
  - 如果使用最大弦扩张，则 $(\theta_r^{(s)})_{s \geq 1}$ 有限步收敛到 θ_r

TSSOS hierarchy

- TSSOS hierarchy：
  - 对 QCQP，有 $\theta_1^{(1)} = \theta_{\text{shor}}$
  - 固定 s，$(\theta_r^{(s)})_{r\geq \underline{r}}$ 单调非减
  - 固定 r，$(\theta_r^{(s)})_{s\geq 1}$ 单调非减
  - 如果使用最大弦扩张，则 $(\theta_r^{(s)})_{s\geq 1}$ 有限步收敛到 θ_r

TSSOS hierarchy

- TSSOS hierarchy：
  - 对 QCQP，有 $\theta_1^{(1)} = \theta_{\text{shor}}$
  - 固定 s，$(\theta_r^{(s)})_{r \geq \underline{r}}$ 单调非减
  - 固定 r，$(\theta_r^{(s)})_{s \geq 1}$ 单调非减
  - 如果使用最大弦扩张，则 $(\theta_r^{(s)})_{s \geq 1}$ 有限步收敛到 θ_r

与符号对称性（sign symmetry）的联系

- **符号对称性**：$f = x^4y^2 + 2x^2y^4 + xy + 1$，$f(x,y) = f(-x,-y)$
- f, g_j 的符号对称性诱导 v_r 及 v_{r-d_j} 的一个分割

定理（Wang, Magron 和 Lasserre，2021）

固定松弛阶数 r。如果使用最大弦扩张，则 *TSSOS hierarchy* 的块结构收敛到符号对称性导出的块结构。

与符号对称性（sign symmetry）的联系

- 符号对称性：$f = x^4y^2 + 2x^2y^4 + xy + 1$，$f(x,y) = f(-x,-y)$
- f, g_j 的符号对称性诱导 v_r 及 v_{r-d_j} 的一个分割

定理（Wang, Magron 和 Lasserre，2021）

固定松弛阶数 r。如果使用最大弦扩张，则 *TSSOS hierarchy* 的块结构收敛到符号对称性导出的块结构。

与符号对称性（sign symmetry）的联系

- 符号对称性：$f = x^4y^2 + 2x^2y^4 + xy + 1$，$f(x,y) = f(-x,-y)$
- f, g_j 的符号对称性诱导 v_r 及 v_{r-d_j} 的一个分割

定理（Wang, Magron 和 Lasserre，2021）

固定松弛阶数 r。如果使用最大弦扩张，则 *TSSOS hierarchy* 的块结构收敛到符号对称性导出的块结构。

稀疏表示定理

定理 (Wang, Magron 和 Lasserre，2021)

假设 $\mathcal{Q}(\mathbf{g})$ 满足 *Archimedean* 条件以及 f 在 S 上是严格正的。则 f 可以表示成

$$f = \sigma_0 + \sum_{j=1}^{m} \sigma_j g_j,$$

其中 $\sigma_i \in \Sigma(\mathbf{x})$ 继承了 f, g_j 的符号对称性。

变量-项联合稀疏性

- CS-TSSOS hierarchy：

1. 利用变量稀疏性分割变量
2. 对每个子系统考虑项稀疏性

变量-项联合稀疏性

- CS-TSSOS hierarchy：
  1. 利用变量稀疏性分割变量
  2. 对每个子系统考虑项稀疏性

结合更多技巧

- 二元变量（$x^2 = 1$）
- Gröbner 基
- 融合 PSD 块
- 提取近似解，用 Ipopt 加细

结合更多技巧

- 二元变量（$x^2 = 1$）
- Gröbner 基
- 融合 PSD 块
- 提取近似解，用 Ipopt 加细

结合更多技巧

- 二元变量（$x^2 = 1$）
- Gröbner 基
- 融合 PSD 块
- 提取近似解，用 Ipopt 加细

结合更多技巧

- 二元变量（$x^2 = 1$）
- Gröbner 基
- 融合 PSD 块
- 提取近似解，用 Ipopt 加细

扩展

- 扩展到复多项式优化

$$\inf_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n}\{f(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}):g_j(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})\geq 0, j=1,\ldots,m, h_j(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})=0, j=1,\ldots,m'\}$$

- 扩展到非交换多项式优化
  - ➤ 特征值优化

$$\inf_{X}\{\mathrm{eig}\, f(X):g_j(X)\succeq 0, j=1,\ldots,m, h_j(X)=0, j=1,\ldots,m'\}$$

  - ➤ 迹优化

$$\inf_{X}\{\mathrm{tr}\, f(X):g_j(X)\succeq 0, j=1,\ldots,m, h_j(X)=0, j=1,\ldots,m'\}$$

扩展

- 扩展到复多项式优化

$$\inf_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n}\{f(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}) : g_j(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}) \geq 0, j=1,\ldots,m, h_j(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})=0, j=1,\ldots,m'\}$$

- 扩展到非交换多项式优化
  - 特征值优化

$$\inf_X\{\mathrm{eig}\, f(X) : g_j(X) \succeq 0, j=1,\ldots,m, h_j(X)=0, j=1,\ldots,m'\}$$

  - 迹优化

$$\inf_X\{\mathrm{tr}\, f(X) : g_j(X) \succeq 0, j=1,\ldots,m, h_j(X)=0, j=1,\ldots,m'\}$$

软件

- TSSOS：基于 JuMP，用户友好，支持交换/复/非交换多项式优化

https://github.com/wangjie212/TSSOS

最优电力流问题（AC-OPF）

n	m+m'	CS ($r = 2$)				CS+TS ($r = 2, s = 1$)			
		mb	opt	time (s)	gap	mb	opt	time (s)	gap
12	28	28	1.1242e4	0.21	0.00%	22	1.1242e4	0.09	0.00%
20	55	28	1.7543e4	0.56	0.05%	22	1.7543e4	0.30	0.05%
72	297	45	4.9927e3	4.43	0.07%	22	4.9920e3	2.69	0.08%
114	315	120	7.6943e4	94.9	0.00%	39	7.6942e4	14.8	0.00%
344	1325	253	–	–	–	73	1.0470e5	169	0.50%
348	1809	253	–	–	–	34	1.2096e5	201	0.03%
766	3322	153	3.3072e6	585	0.68%	44	3.3042e6	33.9	0.77%
1112	4613	496	–	–	–	31	7.2396e4	410	0.25%
4356	18257	378	–	–	–	27	1.3953e6	934	0.51%
6698	29283	1326	–	–	–	76	5.9858e5	1886	0.47%

总结与展望

- SONC/SAGE 分解用于稀疏高次多项式优化
- 当有合适的稀疏性利用时，可显著提高 moment-SOS hierarchy 的求解规模
- 扩展到更多的场景：广义 moment 问题、张量分解、张量优化等
- 相关应用：最优电力流、运筹优化、计算机视觉、神经网络、量子信息……

总结与展望

- SONC/SAGE 分解用于稀疏高次多项式优化
- 当有合适的稀疏性利用时，可显著提高 moment-SOS hierarchy 的求解规模
- 扩展到更多的场景：广义 moment 问题、张量分解、张量优化等
- 相关应用：最优电力流、运筹优化、计算机视觉、神经网络、量子信息……

总结与展望

- SONC/SAGE 分解用于稀疏高次多项式优化
- 当有合适的稀疏性利用时，可显著提高 moment-SOS hierarchy 的求解规模
- 扩展到更多的场景：广义 moment 问题、张量分解、张量优化等
- 相关应用：最优电力流、运筹优化、计算机视觉、神经网络、量子信息……

总结与展望

- SONC/SAGE 分解用于稀疏高次多项式优化
- 当有合适的稀疏性利用时，可显著提高 moment-SOS hierarchy 的求解规模
- 扩展到更多的场景：广义 moment 问题、张量分解、张量优化等
- 相关应用：最优电力流、运筹优化、计算机视觉、神经网络、量子信息……

主要参考文献

- **Jie Wang**, *Nonnegative Polynomials and Circuit Polynomials*, SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry, 2021.
- **Jie Wang**, Victor Magron and Jean B. Lasserre, *TSSOS: A Moment-SOS hierarchy that exploits term sparsity*, SIAM Journal on Optimization, 2021.
- **Jie Wang**, Victor Magron and Jean B. Lasserre, *Chordal-TSSOS: a moment-SOS hierarchy that exploits term sparsity with chordal extension*, SIAM Journal on Optimization, 2021.
- **Jie Wang**, Victor Magron, Jean B. Lasserre and Ngoc H. A. Mai, *CS-TSSOS: Correlative and term sparsity for large-scale polynomial optimization*, arXiv:2005.02828, 2020.
- **Jie Wang** and Victor Magron, Exploiting Term Sparsity in Noncommutative Polynomial Optimization, Computational Optimization and Applications, 2021.

谢谢！

https://wangjie212.github.io/jiewang